Visual Memory Chart 数学Ⅲ　定数分離問題 早見チャート①

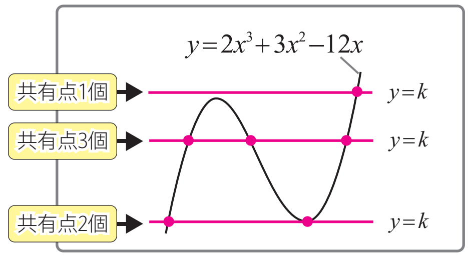
定数分離とは？

dを移項した

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の実数解 ⇔ $ax^3+bx^2+cx=-d$ の実数解 ⇔ $y=ax^3+bx^2+cx$ のグラフと $y=-d$ のグラフとの共有点の x 座標として捉えることができる。このように定数部分を切り離すことを定数分離という。

定数分離の利点は？

例えば，$2x^3+3x^2-12x-k=0$ の実数解の個数を求める場合，
$2x^3+3x^2-12x=k$ と定数分離し，$y=2x^3+3x^2-12x$ …①のグラフと
$y=k$ …② のグラフとの共有点の x 座標の個数と捉えることで，①は
固定された３次関数のグラフで概形がかけ，②は x 軸に平行な直線
で，上下に動くだけなので，簡単に①との交点を掴むことができる。



数Ⅲで定数分離の考え方を用いて，解く問題は主に下記４つのタイプがある。
他の解法でも解けるが，定数分離ができるときは，下記の解法が有効となることが多い。

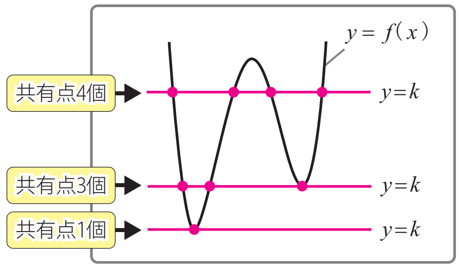
Ⅰ．方程式の実数解の個数の問題

実践例題①，②参照

解法の手順

STEP1 与式を $f(x)=k$（定数）の形に変形する。（定数分離する。）

STEP2 $y=f(x)$ のグラフをかいて，$y=k$（x軸に平行な直線）を
上下に動かして，共有点の個数を調べる。



Ⅱ．曲線外の点から引ける接線の本数を求める問題

解法の手順

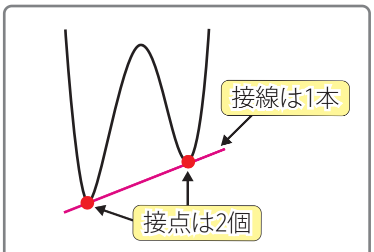
実践例題③参照

STEP1 接点の座標を$(t, f(t))$とおき，接点$(t, f(t))$における接線の方程式
をつくる。　$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

STEP2 STEP1の式が曲線外の点を通ることより，点の座標を代入して t につ
いての方程式をつくる。（このとき，定数分離できる形になっている）

STEP3 STEP2の式を定数を分離して，「タイプⅠ」と同様にして，実数解
の個数を求める。曲線に２点以上で接する直線が存在しない場合，
「実数解の個数」＝「接線の本数」となる。

グラフの形から
判断するしかない！



この場合，
「接点の個数」＝「接線の本数」
とはならない。

Ⅲ．極値をもつ条件問題

実践例題④，⑤参照

解法の手順

Point！ $f(x)$ が極値をもつということは，$f'(x)$ の符号が変わる点があるということ。

STEP1 $y=f(x)$ を微分して，$f'(x)$ を計算する。$f'(x)=g(x)-k$（定数）とできるとき，定数を分離する。

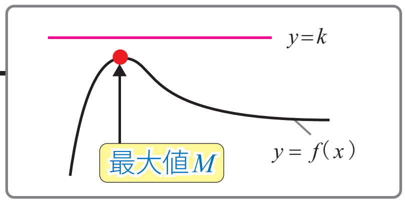
STEP2 極値をもつためには，$y=g(x)$ と $y=k$ が共有点をもち，かつ，その前後で $f'(x)$ の符号が変化
するような k の値の範囲を求める。

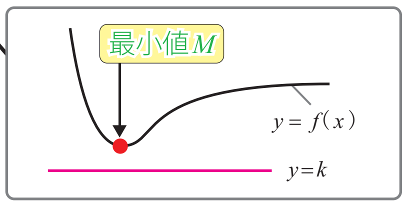
Ⅳ．不等式 $f(x) \leqq a$ が成り立つ条件or証明問題

実践例題⑥，⑦参照

証明問題の解法

$f(x) \leqq k$ が成り立つことを示すには，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフを考え，
$f(x)$ の最大値 $M \leqq k$ を示す。
$f(x) \geqq k$ が成り立つことを示すには，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフを考え，
$f(x)$ の最小値 $m \geqq k$ を示す。





成立条件の解法

$f(x) \leqq k$ が成立するときの k の最小値を求める問題は，$y=f(x)$ の
グラフが $y=k$ のグラフの下側にある条件を調べる。
つまり，$y=f(x)$ の最大値を求めることで k の値が求まる。