Visual Memory Chart

相加相乗平均の解法 早見チャート①

相加平均と相乗平均とは？

2数a, bに対して, $\dfrac{a+b}{2}$ をaとbの相加平均, $a>0$, $b>0$に対して$\sqrt{ab}$ をaとbの相乗平均という。

相加平均と相乗平均の関係

$a\geqq 0$, $b\geqq 0$, のとき, $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ $\left(a+b\geqq 2\sqrt{ab}\right)$ 等号は, $a=b$のとき成立。

相加相乗平均のを使う際の見分け方のポイント

① 文字に正という条件がある。
② 「最小値(最大値)を求めよ。」, 不等式の証明, 大小比較の問題である。
③ 下記タイプの式の形になっている。

Group・タイプ別・解法の手順。

『範囲($x>0$等), 「式の形」の最小値(最大値)を求めよ。』『不等式…を証明せよ。』等の問題。

基本タイプ

$\bullet x+\dfrac{\blacktriangle}{x}+\blacksquare$

基本タイプの解法の手順

STEP1 $\bullet x$, $\dfrac{\blacktriangle}{x}$ が正であることを確認する。

STEP2 公式より $\bullet x+\dfrac{\blacktriangle}{x}+\blacksquare\geqq 2\sqrt{\bullet x\times\dfrac{\blacktriangle}{x}}+\blacksquare=2\sqrt{\bullet\blacktriangle}+\blacksquare$ とする。

STEP3 $\bullet x=\dfrac{\blacktriangle}{x}$ の方程式を解いて, 範囲におけるxの値を求め, 等号成立を確認する。

実践例題①参照

Group Ⅰ

基本タイプを通分したタイプ。割り算(分解)をして基本タイプの形に戻せばよい。

タイプ① $\dfrac{\bullet x^2+\blacktriangle x+\blacksquare}{\bigstar x}$

タイプ①の解法の手順

STEP1 割り算をして, 基本タイプの形に変形する。

STEP2 基本タイプと同じ。(基本タイプ参照)

実践例題②参照

Group Ⅱ

基本タイプの分母のxから★を引いたタイプ。範囲が「$x>\bigstar$」になっていることに注意！

タイプ② $\bullet x+\dfrac{\blacktriangle}{x-\bigstar}+\blacksquare$

タイプ②の解法の手順

STEP1 $x-\bigstar+\dfrac{\blacktriangle}{x-\bigstar}+\blacksquare$ の形に変形する。$x-\bigstar$ をxとみると基本タイプの形になる。

STEP2 基本タイプと同じ。(基本タイプ参照)

実践例題③参照

タイプ③ $\dfrac{\bullet x^2+\blacktriangle x+\blacksquare}{x-\bigstar}$

タイプ③の解法の手順

STEP1 割り算をして, タイプ②の形に変形する。

STEP2 タイプ②と同じ。(タイプ②参照)

実践例題④参照

Group Ⅲ

Group Ⅰの逆数をとったタイプ。『…の最大値を求めよ。』問題にすり変わる。

実践例題⑤参照

タイプ④ $\dfrac{x}{\bullet x^2+\blacktriangle x+\blacksquare}$

タイプ④の解法の手順

STEP1 分母・分子をxで割ると, 分母の部分が基本タイプの形になる。→ $\dfrac{\bigstar}{\bullet x+\dfrac{\blacktriangle}{x}+\blacksquare}$

STEP2 基本タイプと同じ。(基本タイプ参照)

Group Ⅳ

基本タイプのxの部分を, ある文字で置き換えたタイプ。タイプ⑤⑥は常に正より範囲が書いてない！

タイプ⑤ $\bullet x^2+\dfrac{\blacktriangle}{x^2}+\blacksquare$

タイプ⑥ $\bullet a^x+\dfrac{\blacktriangle}{a^x}+\blacksquare$

タイプ⑦ $\bullet xy+\dfrac{\blacktriangle}{xy}+\blacksquare$

タイプ⑧ $\bullet\dfrac{x}{y}+\blacktriangle\dfrac{y}{x}+\blacksquare$

タイプ⑤⑥⑦⑧の解法の手順

STEP1 置き換えた文字をxと見ると, 基本タイプの形になる。

STEP2 基本タイプと同じ。(基本タイプ参照)

タイプ⑨ $\dfrac{\bullet x^4+\blacktriangle x+\blacksquare}{\bigstar x^2}$

タイプ⑨の解法の手順

STEP1 3つの項に分解すると, タイプ⑤の形になる。

STEP2 タイプ⑤と同じ。(タイプ⑤参照)

実践例題⑥参照

タイプ⑩ $\left(\bullet x+\blacktriangle\dfrac{1}{x}\right)\left(\blacksquare x+\bigstar\dfrac{1}{x}\right)$

タイプ⑪ $\left(\bullet a^x+\blacktriangle\right)\left(\blacksquare\dfrac{1}{a^x}+\bigstar\right)$

タイプ⑫ $\left(\bullet x+\blacktriangle\dfrac{1}{y}\right)\left(\blacksquare y+\bigstar\dfrac{1}{x}\right)$

タイプ⑬ $\left(\bullet x+\blacktriangle y\right)\left(\blacksquare\dfrac{1}{x}+\bigstar\dfrac{1}{y}\right)$

タイプ⑩⑪⑫⑬の解法の手順

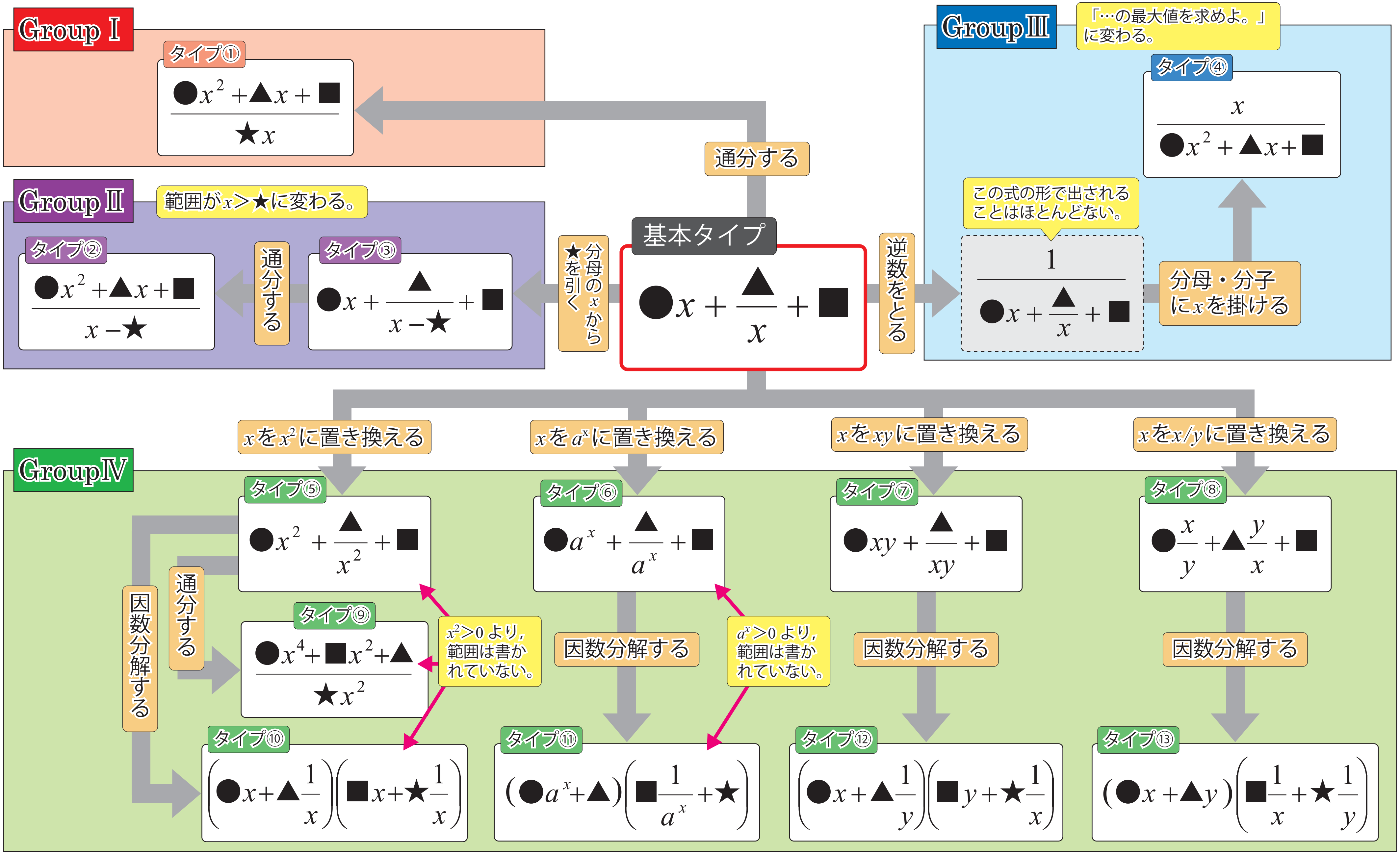
STEP1 展開して整理すると, それぞれタイプ⑤⑥⑦⑧と同じになる。

STEP2 タイプ⑤⑥⑦⑧と同じ。(タイプ⑤⑥⑦⑧参照)

Visual Memory Chart 相加相乗平均の解法 早見チャート②

各Group・タイプの式の成り立ちを理解し，相加相乗平均を使う式を見分ける嗅覚を身に付けよう！

※●, ▲, ■, ★は，同じ値を示すわけではない。
各タイプの解法は「」参照。



Visual Memory Chart 相加相乗平均の解法 早見チャート③

相加相乗平均を使う応用問題

Ⅰ．条件式があるタイプ…… ●>0, ▲>0, 「●, ▲を含む条件式」があり, ●, ▲を含む式の最大値, 最小値を求める問題。

Image問題例 ●>0, ▲>0, ●＋▲＝「定数」 のとき, ●▲ の最大値を求めよ。

解法の手順

→ 実践例題⑫, ⑬参照

STEP1 条件式, ●＋▲＝「定数」の ●, ▲ が正であることを確認する。

STEP2 条件式, ●＋▲＝「定数」の文字の部分に相加相乗平均の関係を使う。※ここでは, ●＋▲＝1 とする。

●＋▲≧2√(●▲)

STEP3 STEP2の式で作った式に条件式の値を代入する。

●＋▲≧2√(●▲) → 1≧2√(●▲)

条件式「●＋▲＝1」を代入！

STEP4 STEP3の式を変形して, 求める式の範囲を求める。

1≧2√(●▲) → 両辺を２乗 → 1≧4●▲ → 両辺を４で割った → ●▲≦$\frac{1}{4}$

STEP5 等号条件を確認して, STEP4の式から, 最大値がわかる。

Ⅱ．辺々掛け合わせタイプ…… 「２つ以上の括弧()の積」の不等式の証明問題や最大値, 最小値を求める問題。

Image問題例 ●, ▲, ■は正の実数とする。(●＋▲)(▲＋■)(■＋●)≧「定数」を証明せよ。

解法の手順

→ 実践例題⑪参照

STEP1 ()内の文字●, ▲, ■が正であることを確認する。

STEP2 それぞれ()内の式に相加相乗平均の関係を使う。

●＋▲≧2√(●▲), ▲＋■≧2√(▲■), ■＋●≧2√(■●)

STEP3 STEP2の３式の辺々を掛け合わせる。

(●＋▲)(▲＋■)(■＋●)≧2√(●▲)×2√(▲■)×2√(■●)＝8√((●▲■)²)＝8●▲■

※ここで作った右辺(8●▲■)が, 与式の右辺(定数)となっていればOK！

STEP4 等号条件を確認する。

等号条件は, ●＝▲ かつ ▲＝■ かつ ■＝●より●＝▲＝■のとき。

※掛け合わせることができても, 等号は成り立つとは限らない。それぞれの式の等号が同時に成り立つとき(STEP2のすべての不等式の等号が成立するとき)だけ, 掛け合わせた不等式の等号も成り立つ。

その他, 相加相乗平均を使う重要問題

ある文字で置き換えたときの「変域」に相加相乗平均の関係を使うタイプ。主に下記２タイプがある。

Ⅰ．$t=x+\frac{1}{x}$ とおくタイプ

→ 実践例題⑬参照

$x>0$ のとき, $t=x+\frac{1}{x}$ とおくと, 相加相乗平均の関係を用いて

$t=x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ → tの範囲は, $t\geqq 2$ となる！

Ⅱ．$t=a^x+a^{-x}$とおくタイプ

$t=a^x+a^{-x}$とおくと, 相加相乗平均の関係を用いて

$t=a^x+\frac{1}{a^x}\geqq 2\sqrt{a^x\cdot\frac{1}{a^x}}=2$ → tの範囲は, $t\geqq 2$ となる！

Visual Memory Chart 相加相乗平均の解法 早見チャート④

相加相乗平均の証明問題

相加相乗平均の証明問題は，入試でも$n=3$，$n=4$のときの証明問題がたまに出題される。

相加相乗平均の一般形

$x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots\cdots x_n>0$ のとき，

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ \cdots\cdots\ +x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\ \cdot\cdots\cdots\cdot x_n}$$ が成立する。等号成立は，$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$のとき。

$n=2$ のときの証明

公式 $a>0,\ b>0$ のとき，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ 等号成立は $a=b$ のとき。

証明方法はいくつかあるが下記，証明が一番有名である。

左辺−右辺 $=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$

等号成立は $\sqrt{a}=\sqrt{b}\Leftrightarrow a=b$ のときである。……（証明終）

$n=4$ のときの証明

公式 $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ のとき，$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqq\sqrt[4]{abcd}$
等号成立は $a=b=c=d$ のとき。

$n=4$ のときの証明は，$n=2$ のときの相加相乗平均を使って証明することがポイント！

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ より，相加相乗平均の関係から

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ ……① $\dfrac{c+d}{2}\geqq\sqrt{cd}$ ……② ← 上記，$n=2$のときの証明参照

①，②の辺々を加えて

$\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}\geqq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\Leftrightarrow\dfrac{a+b+c+d}{2}\geqq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ ……③

また，$\sqrt{ab}>0$，$\sqrt{cd}>0$ より，相加相乗平均の関係から

$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\geqq 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=2\sqrt[4]{abcd}$ ……④ よって，③，④より，$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqq\sqrt[4]{abcd}$

∴ 等号成立は $a=b=c=d$ のときである。……（証明終）

$n=3$ のときの証明

公式 $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$
等号成立は $a=b=c$ のとき。

$n=3$ のときの証明は，下記，２通りの方法が重要である！

case1

左辺−右辺 $=\dfrac{1}{3}(a+b+c)-\sqrt[3]{abc}$

ここで $\sqrt[3]{a}=A,\ \sqrt[3]{b}=B,\ \sqrt[3]{c}=C$ とおくと

$a=A^3,\ b=B^3,\ c=C^3$

与式 $=\dfrac{1}{3}(A^3+B^3+C^3-3ABC)$

$x^3+y^3+y^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\dfrac{1}{3}(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

$=\dfrac{1}{3}(A+B+C)\cdot\dfrac{1}{2}\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}\geqq 0$

（$\because\ A>0,\ B>0,\ C>0$） $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

等号成立は $A-B=0,\ B-C=0,\ C-A=0\Leftrightarrow A=B=C$

∴ $a=b=c$ のときである。……（証明終）

case2 $n=4$ のときの証明を利用！

$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqq\sqrt[4]{abcd}$ において

$d=\dfrac{a+b+c}{3}$ とおくと

$$\frac{a+b+c+\dfrac{a+b+c}{3}}{4}=\frac{\dfrac{4a+4b+4c}{3}}{4}=\frac{a+b+c}{3}=d\geqq\sqrt[4]{abcd}$$

$d\geqq\sqrt[4]{abcd}$ の両辺を４乗して，

$d^4\geqq abcd$ $d>0$ より，d で割ると

$d^3\geqq abc$ 再び，3乗根をとると

$d\geqq\sqrt[3]{abc}$

よって $\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$

等号成立は，$a=b=c$ のときである。……（証明終）