Visual Memory Chart

積分計算 タイプ別 早見チャート

Ⅰ.基本公式タイプ……下記,基本公式を使って解けるタイプ。

※本チャートでは $f^n(x)=\{f(x)\}^n$ とする。

公式

① $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (n\neq-1)$　② $\int x^{-1}dx=\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$　③ $\int \sin x dx=-\cos x+C$　④ $\int \cos x dx=\sin x+C$

⑤ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$　⑥ $\int e^x dx=e^x+C$　⑦ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

Ⅱ.$\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)dx}{a}$ タイプ……1次関数との合成タイプ。下記,公式で即解ける。

公式 $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)dx}{a}+C$

a で割ることを忘れない！

例 $\int \sin(2x-1)dx$　$\int \sqrt{2x-1}\,dx$　$\int \frac{1}{(2x-1)^4}dx$　$\int e^{2x-1}dx$

Ⅲ.置換積分タイプ……ある塊を文字で置き換えることによって,他のタイプに変形できるタイプ。置き換えは,大きい塊を置き換えた方がうまくいくことが多い。

例 $\int\sqrt{1-\sqrt{x}}$　$\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$　$\int\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)^3}}dx$　$\int\frac{x}{(2x-1)^4}dx$　$\int xe^{x^2}dx$　$2\int x^3e^{x^2}dx$

Ⅳ.$\int f'(x)f^n(x)dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)$ タイプ……置換積分の1種であるが,この形になっていたら下記,公式で即解ける。

公式 $\int f'(x)f^n(x)dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C\ (n\neq-1)$

証明 $\{f^{n+1}(x)\}'=(n+1)f'(x)f^n(x)$ ← 合成関数の微分

$f'(x)f^n(x)=\frac{1}{n+1}\{f^{n+1}(x)\}'$

両辺をxで積分して $\int f'(x)f^n(x)dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C$ ■

例 $\int\sin^3 xdx$　$\int\sin^3 x\cos xdx$　$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$　$\int\frac{\log x}{x}dx$

Ⅴ.$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$ タイプ……置換積分の1種であるが,分数関数で,分子の式が分母の式を微分した形になっていたら下記,公式で即解ける。

公式 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

絶対値を忘れない！

証明 $\{\log f(x)\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ ← 合成関数の微分

両辺をxで積分して $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$ ■

例 $\int\frac{1}{\tan x}dx$　$\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$　$\int\frac{1}{x\log x}dx$　$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

Ⅵ.部分積分タイプ……主に種類の違う2種類の関数の積を1種類の関数に変えることによって積分できるタイプ。部分的に積分するので「部分積分」という。

公式 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

どちらを $f(x)$にするかがポイントとなる！

(x^nなどの整式)×(指数関数)→(整式)の方を$f(x)$とする。

(x^nなどの整式)×(三角関数)→(整式)の方を$f(x)$とする。

(x^nなどの整式)×(対数関数)→(対数関数)の方を$f(x)$とする。

証明 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ← 積の微分

$f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x)$

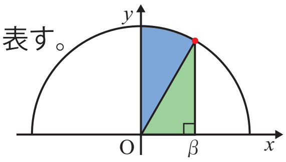
両辺をxで積分して

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ ■

例 $\int x\sin xdx$　$\int\sin(\log x)dx$　$\int\log xdx$　$\int xe^xdx$

Ⅶ.円の一部タイプ……定積分で $\int_\alpha^\beta\sqrt{a^2-x^2}dx$ の形のタイプ。$x=a\sin\theta$ で置換しても解けるが,円の一部として見れば簡単に解ける。

$\int_\alpha^\beta\sqrt{a^2-x^2}dx$ において,$y=\sqrt{a^2-x^2}$ とおくと $x^2+y^2=a^2$ となるので,半円を表す。$\alpha=0$, $\beta>0$ のとき,$\int_0^\beta\sqrt{a^2-x^2}dx$ となり,右図の斜線部分を表し,扇形(青色)と三角形(緑色)の面積の和となる。



例 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

Ⅷ.特殊置換タイプ……特殊な置き換えによって,他のタイプに変形できるタイプ。

頻出置換例

① $\sqrt{a^2-x^2}$ ➡ $x=a\sin\theta$ ($a\cos\theta$ も可)　② x^2+a^2 ➡ $x=a\tan\theta$

③ $\sqrt{x^2+a}$ ➡ $t=x+\sqrt{x^2+a}$　④ $\sin x$ ⇔ $\cos x$の変換は $x=\frac{\pi}{2}-\theta$ と置換。

例 $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}dx$　$\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx$

Visual Memory Chart

積分計算 攻略チャート 三角関数編

※基本公式を使うタイプは省略。

■ 三角関数特有の式変形

※例題の解答は，「練習問題 三角関数編」参照

① 次数下げ式変形……1次式に次数を下げることによって解く。

2倍角の公式 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

例題22 $\int \sin x\cos x\,dx$ ← $\int f'(x)f^{n}(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)$でも解ける

半角の公式 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

例題4 $\int \sin^2 x\,dx$　例題5 $\int \cos^2 x\,dx$

例題10 $\int \sin^4 x\,dx$　例題11 $\int \cos^4 x\,dx$

積⇒和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\},\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\},\quad \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

例題23 $\int \cos x\cos 4x\,dx$　例題24 $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

② ×(sin$x$/sin$x$)，(cos$x$/cos$x$)による式変形…1/sin$x$, 1/cos$x$の積分に使う。 例題16 $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$　例題17 $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

③ 次数上げ式変形…2次式に次数を上げることによって，ルートを外して解く。 例題25 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx$

④ 基本公式による式変形……下記，基本公式を用いて，式変形することによって解く。

基本公式 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

例題21 $\int \frac{1}{\tan^2 x}\,dx$　例題6 $\int \tan^2 x\,dx$

■ 三角関数の積分計算

Ⅰ. $\int f(ax+b)\,dx=\frac{F(ax+b)\,dx}{a}$ **タイプ**…… $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\tan(ax+b)$ の形のもの。

公式 $\int\sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$, $\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$, $\int\tan(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)|$

※積分定数は省略

例題26 $\int \sin(2x-1)\,dx$

Ⅱ. $\int f'(x)f^{n}(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)$ **タイプ**…… sin, cosの奇数乗は，1乗を切り離して，式変形すると，このタイプになる。

sin, cosの奇数乗は，1乗を切り離して，式変形してこの公式！ 例題7 $\int \sin^3 x\,dx$　例題8 $\int \cos^3 x\,dx$　例題9 $\int \tan^3 x\,dx$

例題12 $\int \tan^4 x\,dx$　例題13 $\int \sin^5 x\,dx$　例題14 $\int \cos^5 x\,dx$　例題27 $\int \sin^3 x\cos x\,dx$　例題28 $\int \sin x\cos x\sqrt{\sin^2 x+1}\,dx$

Ⅲ. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|$ **タイプ**…… 分数関数で，三角関数のみの形，tan$x$のみの形はこのタイプを考えてみる。

公式 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$

例題29 $\int \frac{\cos x+1}{\sin x+x}\,dx$　例題3 $\int \tan x\,dx$　例題18 $\int \frac{1}{\tan x}\,dx$

Ⅳ. 部分積分タイプ… (x^nなどの整式)×(三角関数)タイプ。積分する関数を三角関数にして解く。

公式 $\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$ (整式)の方を$f(x)$とする！ 例題30 $\int x\sin x\,dx$

Ⅴ. 特殊置換タイプ…… $x=\frac{\pi}{2}-\theta$ と置換することにより，sin→cos，cos→sin に変換して解く。

公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

例題31 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx$　例題19 $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

■ 三角関数n乗の積分計算のポイント

sin, cosの奇数乗は，1乗を切り離して，Ⅱタイプへ。sin, cosの偶数乗は，2倍角の公式を用いて式変形。
sin, cos, tanのn乗は漸化式を用いて解ける！

Visual Memory Chart

積分計算 攻略チャート 指数・対数関数編

※基本公式を使うタイプは省略。

■ 指数関数の積分計算

※例題の解答は，「練習問題 指数関数編」参照

Ⅰ. $\int f(ax+b)\,dx=\dfrac{F(ax+b)\,dx}{a}$ タイプ…… e^{ax+b}, A^{ax+b}の形のもの。

公式 $\int e^{ax+b}dx=\dfrac{1}{a}e^{ax+b}+C$, $\int A^{ax+b}dx=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{A^{ax+b}}{\log A}+C$ ($A>0$かつ$A\neq1$)

例題1 $\int e^{2x-1}dx$

Ⅱ. 置換積分タイプ …… (整式)×e^{x^n}の形でタイプx^n部分を置換することによって解く。

例 $\int x^3e^{x^2}dx$

この部分をtとおく！

置き替えたらdxもdtに！

置換することで部分積分を使う形になることが多い！

例題2 $\int xe^{x^2}dx$

例題3 $2\int x^3e^{x^2}dx$

Ⅲ. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$ タイプ…… 分数関数で，分母・分子ともに指数関数のみの形のときに考えてみる。。

例 $\int \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

分母・分子ともに指数関数で，
$(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$となっている！

例題4 $\int \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

例題5 $\int \dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

Ⅳ. 部分積分タイプ…… 主に下記２タイプがある。

公式 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ を使う際，どちらを$f(x)$にするかがポイント！

① (整式)×e^xの形をしているタイプ……(整式)の方を$f(x)$とする。 例題6 $\int xe^x dx$ 例題7 $\int x^2e^x dx$

② (三角関数)×e^xの形をしているタイプ……
部分積分を2回すると問題と同じ形が出現するので，
その方程式を解くことで，求めることができる。(三角関数)の方を$f(x)$とする。

例題8 $\int e^x\sin x\,dx$ 例題9 $\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

■ 対数関数の積分計算

※例題の解答は，「練習問題 対数関数編」参照

Ⅰ. $\int f'(x)f^n(x)\,dx=\dfrac{1}{n+1}f^{n+1}(x)$ タイプ…… 分母がxで，分子が$(\log x)^n$の形のタイプ。

$\dfrac{1}{x}\cdot(\log x)^n$は，$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$なので，$f'(x)f^n(x)$の形になっている。 例題1 $\int \dfrac{\log x}{x}dx$ 例題2 $\int \dfrac{(\log x)^2}{x}dx$

Ⅱ. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$ タイプ…… 分数関数で分母が$\log x$で $1/x$が掛けてあるタイプ。

$\dfrac{a}{x\log x}$は，$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$なので，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$の形になっている。 例題3 $\int \dfrac{1}{x\log x}dx$

Ⅲ. 部分積分タイプ…… 主に下記２タイプがある。

公式 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ を使う際，どちらを$f(x)$にするかがポイント！

① 整式(1を含む)×$\log x$の形をしているタイプ……$\log x$の方を$f(x)$とする。

$\int \log x\,dx$ は $\int (x)'\log x\,dx$ と考える！ $\int \log x\,dx$ の計算は頻繁に出るので$x\log x-x$ と覚えておくとよい！

例題4 $\int \log x\,dx$ 例題5 $\int x^2\log x\,dx$ 例題6 $\int (\log x)^2dx$ 例題7 $\int \log(2x-1)\,dx$

② $\sin(\log x)$, $\cos(\log x)$の形をしているタイプ……
部分積分を2回すると問題と同じ形が出現するので，
その方程式を解くことで，求めることができる。$\sin(\log x)$の方を$f(x)$とする。

例題8 $\int \sin(\log x)\,dx$

Visual Memory Chart

積分計算 例題 一覧表

※例題の解答は『練習問題 各編』参照。（三角関数の例題 1 ～21は『チャート 三角関数編②③』， 例題22～31は『練習問題 三角関数編』参照。）

三角関数			無理関数	分数関数	指数関数	対数関数
例題1 $\int \sin x dx$	例題2 $\int \cos x dx$	例題3 $\int \tan x dx$	例題1 $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} dx$	例題1 $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^2} dx$	例題1 $\int e^{2x-1} dx$	例題1 $\int \frac{\log x}{x} dx$
例題4 $\int \sin^2 x dx$	例題5 $\int \cos^2 x dx$	例題6 $\int \tan^2 x dx$	例題2 $\int \sqrt{2x-1}\ dx$	例題2 $\int \frac{x^3+2x}{x^2+1} dx$	例題2 $\int x e^{x^2} dx$	例題2 $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$
例題7 $\int \sin^3 x dx$	例題8 $\int \cos^3 x dx$	例題9 $\int \tan^3 x dx$	例題3 $\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\ dx$	例題3 $\int \frac{1}{x^2-4} dx$	例題3 $2\int x^3 e^{x^2} dx$	例題3 $\int \frac{1}{x \log x} dx$
例題10 $\int \sin^4 x dx$	例題11 $\int \cos^4 x dx$	例題12 $\int \tan^4 x dx$	例題4 $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x+1)^3}} dx$	例題4 $\int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx$	例題4 $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$	例題4 $\int \log x\, dx$
例題13 $\int \sin^5 x dx$	例題14 $\int \cos^5 x dx$	例題15 $\int \tan^5 x dx$	例題5 $\int (2x+1)\sqrt{x+2}\ dx$	例題5 $\int \frac{1}{(2x-1)^4} dx$	例題5 $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$	例題5 $\int x^2 \log x\, dx$
例題16 $\int \frac{1}{\sin x} dx$	例題17 $\int \frac{1}{\cos x} dx$	例題18 $\int \frac{1}{\tan x} dx$	例題6 $\int x\sqrt{1-x^2}\ dx$	例題6 $\int \frac{1}{4x^2-4x+1} dx$	例題6 $\int x e^x dx$	例題6 $\int (\log x)^2 dx$
例題19 $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	例題20 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	例題21 $\int \frac{1}{\tan^2 x} dx$	例題7 $\int \frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+4}} dx$	例題7 $\int \frac{x}{(2x-1)^4} dx$	例題7 $\int x^2 e^x dx$	例題7 $\int \log(2x-1)\, dx$
例題22 $\int \sin x \cos x dx$		例題23 $\int \cos x \cos 4x dx$	例題8 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$	例題8 $\int \frac{1}{2x-1} dx$	例題8 $\int e^x \sin x\, dx$	例題8 $\int \sin(\log x)\, dx$
例題24 $\int \sin 3x \cos 2x dx$		例題25 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x} dx$	例題9 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$	例題9 $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$	例題9 $\int e^{-x} \cos 2x dx$	
例題26 $\int \sin(2x-1) dx$		例題27 $\int \sin^3 x \cos x dx$	例題10 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$	例題10 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$		
例題28 $\int \sin x \cos x \sqrt{\sin^2 x+1} dx$		例題29 $\int \frac{\cos x+1}{\sin x+x} dx$	例題11 $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\ dx$	例題11 $\int_1^4 \frac{1}{x^2-2x+4} dx$		
例題30 $\int x \sin x dx$		例題31 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\ dx$				

黒字は, 基本公式タイプorまず式変形をするタイプ。

赤色字は, 1次関数との合成タイプ

緑色字は, 置換積分タイプ

青色字は, $\int f'(x) f^n(x)\, dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C\ (n \neq -1)$ タイプ

橙色字は, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$ タイプ

紫色字は, 部分積分タイプ

茶色字は, 円の一部タイプ

水色字は, 特殊置換タイプ

Visual Memory Chart 積分計算 攻略チャート 分数関数編

※基本公式を使うタイプは省略。

■ 分数関数特有の式変形

※例題の解答は，「練習問題 分数関数編」参照

① **分子の次数下げ**…… 分子＞分母のとき，割り算をして次数を下げて解く。

$\frac{f(x)}{g(x)}$ において，「分子 $f(x)$ の次数」≧「分母 $g(x)$ の次数「ならば，

「分子 $f(x)$ の次数」＜「分母 $g(x)$ の次数」になるまで，割り算をして次数を下げる。

$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)Q(x)+R(x)}{g(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$$ となる。

例題1 $\int\frac{(x^2-1)^2}{x^2}dx$　　例題2 $\int\frac{x^3+2x}{x^2+1}dx$

② **部分分数分解**…… 分母が因数分解できるとき，部分分数の分解を考える。

部分分数の分解例 $\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}$ ， $\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)^2}=\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}+\frac{c}{(x-\beta)^2}$

こう分けることがポイント！

例題3 $\int\frac{1}{x^2-4}dx$　　例題4 $\int\frac{3x+4}{x^2+3x+2}dx$

■ 分数関数の積分計算

Ⅰ. $\int f(ax+b)\,dx=\frac{F(ax+b)dx}{a}$ **タイプ**…… $(ax+b)^{-n}$，$\frac{1}{(ax+b)^n}$ の形になっているもの。

公式 $\int(ax+b)^{-n}dx=\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{a}\cdot(ax+b)^{-n+1}+C$

$n=1$ のときはタイプⅢになる！

例題5 $\int\frac{1}{(2x-1)^4}dx$　　例題6 $\int\frac{1}{4x^2-4x+1}dx$

Ⅱ. 置換積分タイプ …… タイプⅠ，Ⅲが使えない場合に考えてみる。

例 $\int\frac{x}{(2x-1)^4}dx$

タイプⅠ，Ⅲが使えないので，置換を考えてみる！

$2x-1=t$ と置く！ → 置き替えたら dx も dt に！

例題7 $\int\frac{x}{(2x-1)^4}dx$

Ⅲ. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$ **タイプ**…… 分母の式を微分した値が分子の式になっているもの。

公式 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$，$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{\log|ax+b|}{a}+C$ ← タイプⅠの $n=1$ の場合！

a で割ることを忘れない！

例題8 $\int\frac{1}{2x-1}dx$　　例題9 $\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$

Ⅳ. 特殊置換タイプ…… $\frac{1}{x^2+a^2}$ の形になっているもので，$x=a\tan\theta$ と置換する。

平方完成して，この形になるタイプになるものがあるので注意！

例 $\int\frac{1}{x^2-2x+4}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2+3}dx$

平方完成　$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ と置く！

例題10 $\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx$　　例題11 $\int_1^4\frac{1}{x^2-2x+4}dx$

Visual Memory Chart

積分計算 攻略チャート 無理関数編

※基本公式を使う
タイプは省略。

■ 無理関数特有の式変形

※例題の解答は，「練習問題　無理関数編」参照

■ 分母の有理化…… 分母の式にルートがあったら有理化を考えてみる。

例えば，$\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ のとき，このままの形では積分できないので，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ を掛けてみると

$\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ となり，積分できる形になる！

例題 1 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}dx$

■ 無理関数の積分計算

Ⅰ. $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx=\frac{F(ax+b)dx}{a}$ タイプ…… $(ax+b)^{\frac{m}{n}}$ の形になっているもの。

公式 $\displaystyle\int(ax+b)^{\frac{m}{n}}dx=\frac{1}{\frac{m}{n}+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}+C$

a で割ること
を忘れない！

例題 2 $\displaystyle\int\sqrt{2x-1}\,dx$

Ⅱ. 置換積分タイプ …… ルートの中にルートの形，Ⅰ やⅢが使えない場合に考えてみる。

例① $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)^3}}dx$ 　$\sqrt{x+1}=t$ と置く！

例② $\displaystyle\int\sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx$ 　$1-\sqrt{x}=t$ と置く！

置き替えたら dx も dt に！

例題 3 $\displaystyle\int\sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx$　**例題 4** $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)^3}}dx$　**例題 5** $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$

Ⅲ. $\displaystyle\int f'(x)f^n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)$ タイプ…… ルートの中の式を微分した値が掛けられているもの。

例 $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$ 　ルートの中を微分した
ものが掛けられている！

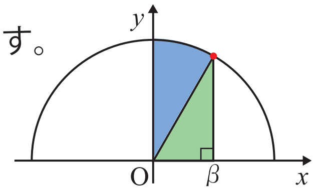
例題 6 $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$　**例題 7** $\displaystyle\int\frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+4}}dx$

Ⅳ. 円の一部タイプ…… 定積分で $\int_\alpha^\beta\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ の形のタイプ。$x=a\sin\theta$ で置換しても解けるが，円の一部として見れば簡単に解ける。

$\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ において，$y=\sqrt{a^2-x^2}$ とおくと $x^2+y^2=a^2$ となるので，半円を表す。

$\alpha=0,\ \beta>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\beta\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ となり，右図の斜線部分を表し，

扇形（青色）と三角形（緑色）の面積の和となる。



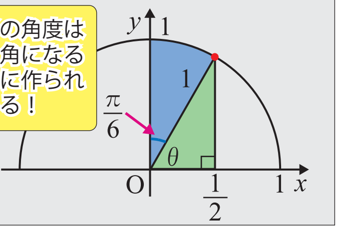
例 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ のとき，右図より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となり，

扇形の角度は $\dfrac{\pi}{6}$ となる。

三角形の面積　扇形の面積

よって，面積は $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\pi\cdot1^2\cdot\dfrac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\pi}{12}$

扇形の角度は
有名角になる
ように作られ
ている！



例題 8 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

Ⅴ. 特殊置換タイプ…… 無理関数の特殊置換は下記 2 タイプがある。

① $\sqrt{a^2-x^2}$ タイプ …… $x=a\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ （$a\cos\theta$ も可）と置換する。　**例題 9** $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

③ $\sqrt{x^2+a}$ タイプ …… $t=x+\sqrt{x^2+a}$ と置換する。　**例題10** $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$　**例題11** $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$

http://love-su-gaku.com/ Manabu Sato(C)2010

積分計算　練習問題 分数関数編①

例題1 $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)^2}{x^2}\,dx$

$$\int\frac{(x^2-1)^2}{x^2}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}\right)dx$$

分子を展開

$$=\int\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-2x-\frac{1}{x}+C$$

$\displaystyle\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ $(n\neq-1)$

例題2 $\displaystyle\int\frac{x^3+2x}{x^2+1}\,dx$

$$\int\frac{x^3+2x}{x^2+1}\,dx$$

割り算をして
分解した！

$$\begin{array}{r} x \\ x^2+1\,\big)\,\overline{x^3+2x} \\ -)\,\underline{x^3+\ \ x} \\ x \end{array}$$

$$=\int\left(x+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$$

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

正なので絶対値はいらない！

例題3 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-4}\,dx$

$$\int\frac{1}{x^2-4}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx$$

分母を因数分解

部分分数に分解

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

$$=\frac{1}{4}\left\{\log|x-2|-\log|x+2|\right\}+C$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

$\log A-\log B=\log\dfrac{A}{B}$

例題4 $\displaystyle\int\frac{3x+4}{x^2+3x+2}\,dx$

$$\int\frac{3x+4}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$=\int\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

分母を因数分解

$$=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$

部分分数に分解

$$=\log|x+1|+2\log|x+2|+C$$

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

$$=\log\left|(x+1)(x+2)^2\right|+C$$

$\log A+\log B=\log AB$

例題5 $\displaystyle\int\frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$

$$\int\frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$$

$$=\int(2x-1)^{-4}\,dx$$

$\displaystyle\int(ax+b)^{-n}dx=\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{a}\cdot(ax+b)^{-n+1}+C$

$$=\left(\frac{1}{-4+1}\right)\cdot\frac{1}{2}(2x-1)^{-4+1}+C$$

$$=-\frac{1}{6(2x-1)^3}+C$$

例題6 $\displaystyle\int\frac{1}{4x^2-4x+1}\,dx$

$$\int\frac{1}{4x^2-4x+1}\,dx$$

$$\int\frac{1}{(2x-1)^2}\,dx$$

分母を因数分解

$$=\int(2x-1)^{-2}\,dx$$

$\displaystyle\int(ax+b)^{-n}dx=\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{a}\cdot(ax+b)^{-n+1}+C$

$$=\left(\frac{1}{-2+1}\right)\cdot\frac{1}{2}(2x-1)^{-2+1}+C$$

$$=-\frac{1}{2(2x-1)}+C$$

積分計算 練習問題 分数関数編②

例題7 $\displaystyle\int \frac{x}{(2x-1)^4}dx$

$2x-1=t$ とおくと $x=\dfrac{t+1}{2}$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow dx=\dfrac{1}{2}dt$

$$\text{与式}=\int \frac{t+1}{2}\cdot\frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{2}dt$$

x から t に置換した

$$=\frac{1}{4}\int (t^{-3}+t^{-4})\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{t^{-2}}{2}-\frac{t^{-3}}{3}\right)+C$$

$\displaystyle\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ $(n\neq-1)$

$$=-\frac{6x-1}{24(2x-1)^3}+C$$

t から x に戻した

例題8 $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1}dx$

$$\int \frac{1}{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)'}{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log\underline{|2x-1|}+C$$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

絶対値を忘れない！

例題9 $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}dx$$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

$$=\frac{1}{2}\log(\underline{x^2+2x+3})+C$$

x^2+2x+3
$=(x+1)^2+2>0$ なので
絶対値はいらない！

例題10 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$

$x=\tan\theta$ とおくと

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\to1$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{4}$

$$\text{与式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\right)$$

x から θ に
置換した

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$\tan^2x+1=\dfrac{1}{\cos^2x}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

例題11 $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2-2x+4}dx$

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ から

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\to4$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{3}$

$$\text{与式}=\int_1^4\frac{1}{(x-1)^2+3}dx$$

x から θ に置換した

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\sqrt{3}\tan\theta)^2+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$\tan^2x+1=\dfrac{1}{\cos^2x}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

積分計算 練習問題 無理関数編①

例題1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\,dx$

$$与式=\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\,dx \leftarrow$$

有理化

$$=\int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{x+2-x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int (\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\,)\,dx$$

$$\int(ax+b)^{\frac{m}{n}}dx=\frac{1}{\frac{m}{n}+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}+C$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right\}+C \leftarrow$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(x+2)\sqrt{(x+2)}+x\sqrt{x}\,\right\}+C$$

例題2 $\displaystyle\int \sqrt{2x-1}\;dx$

$$\int\sqrt{2x-1}\,dx$$

$$=\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\int(ax+b)^{\frac{m}{n}}dx=\frac{1}{\frac{m}{n}+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}+C$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}+1}dx \leftarrow$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$$

例題3 $\displaystyle\int\sqrt{1-\sqrt{x}}\;dx$

$1-\sqrt{x}=t$　とおくと

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}\ \Leftrightarrow\ dx=-2\sqrt{x}dt$$

$$与式=\int\sqrt{t}\{-2(1-t)\,dt\} \leftarrow$$

xからtに置換した

$$=-2\int\sqrt{t}\,(1-t)\,dt$$

$$=-2\int\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=-2\left\{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right\}+C \leftarrow$$

$$\int(ax+b)^{\frac{m}{n}}dx=\frac{1}{\frac{m}{n}+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}+C$$

$$=-2\left\{\frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(1-\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}\right\}+C \leftarrow$$

tからxに戻した

例題4 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)^3}}\,dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと

両辺を２乗して　$x+1=t^2$

$x=t^2-1$　から　$\dfrac{dx}{dt}=2t\ \Leftrightarrow\ dx=2tdt$

$$与式=\int\frac{(t^2-1)^2}{t^3}\cdot 2tdt \leftarrow$$

xからtに置換した

$$=2\int\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=2\left(\frac{t^3}{3}-2t-\frac{1}{t}\right)+C \leftarrow$$

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\quad(n\neq-1)$$

$$=\frac{2(x^2-4x-8)}{3\sqrt{x+1}}+C \leftarrow$$

tからxに戻した

例題5 $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$

$\sqrt{x+2}=t$ とおく。

両辺を２乗して $x+2=t^2$　よって $x=t^2-2$

$\dfrac{dx}{dt}=2t\ \Leftrightarrow\ dx=2tdt$

$$与式=\int(2t^2-3)\cdot t\cdot 2tdt \leftarrow$$

xからtに置換した

$$=\int(4t^4-6t^2)\,dt$$

$$=\frac{4}{5}t^5-2t^3+C \leftarrow$$

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

$$=\frac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C \leftarrow$$

tからxに戻した

例題6 $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int(-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)'(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}+C \leftarrow$$

$$\int f'(x)f^n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C$$

積分計算 練習問題 無理関数編②

例題７ $\displaystyle\int\frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+4}}dx$

$$\int\frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+4}}dx$$

$$=\int\frac{(3x^2+x+4)'}{\sqrt{3x^2+x+4}}dx$$

$$=\int(3x^2+x+4)'(3x^2+x+4)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}(3x^2+x+4)^{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$\int f'(x)f^n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C$$

$$=2(3x^2+x+4)^{\frac{1}{2}}+C$$

例題８ $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

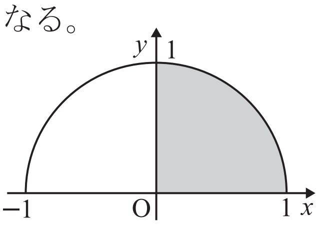
$y=\sqrt{1-x^2}$ とおき，両辺を2乗すると

$x^2+y^2=1^2$ となるので，

右図，円の面積の4分の1となる。

よって，

与式 $=\pi\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi}{4}$



例題９ $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Point！ $x=a\cos\theta$ とおいても解ける！

$x=4\sin\theta$ とおくと

$\dfrac{dx}{d\theta}=4\cos\theta\Leftrightarrow dx=4\cos\theta\,d\theta$

x	$0\to2$
θ	$0\to\frac{\pi}{6}$

$$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}=4\sqrt{\cos^2\theta}$$

$$=4|\cos\theta|=4\cos\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta\geqq0$

$\sqrt{a^2}=|a|=a$ （$a>0$）より

$$\text{与式}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$

$$=[\theta]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

例題10 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\overset{t}{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow dx=\frac{\sqrt{x^2+1}}{t}dt$$

$$\text{与式}=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{t}dt$$

xからtに置換した

$$=\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\log|t|+C$$

$$\int x^{-1}dx=\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$$

tからxに戻した

例題11 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$

$\sqrt{1+x^2}+x=t$ とおくと

$\sqrt{1+x^2}=t-x$ から両辺を２乗して

$1+x^2=t^2-2tx+x^2$

$x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ ……①

xについて解いた

$$1+x^2=1+\left\{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}^2=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$$

$t>0$ より $\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$

①の両辺をxで微分して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$\text{与式}=\int\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}\log|t|-\frac{1}{8t^2}+C$$

$$=\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{2}\log|t|+C$$

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}$$
$$=\sqrt{1+x^2}-x$$
$$t^2-\frac{1}{t^2}=(\sqrt{1+x^2}+x)^2-(\sqrt{1+x^2}-x)^2$$
$$=4x\sqrt{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot4x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2}+x)+C$$

$$=\frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2}+\log(\sqrt{1+x^2}+x)\}+C$$

積分計算 練習問題 指数関数編①

例題 1 $\int e^{2x-1}dx$

$$\int e^{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C \longleftarrow \boxed{\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C}$$

例題 2 $\int xe^{x^2}dx$

$x^2=t$ とおく。

$$\frac{dt}{dx}=2x \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$$

$$\text{与式}=\frac{1}{2}\int e^{t}dt \longleftarrow \boxed{x\text{から}t\text{に置換した}}$$

$$=\frac{1}{2}e^{t}+C \longleftarrow \boxed{\int e^{x}dx=e^{x}+C}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2}+C \longleftarrow \boxed{t\text{から}x\text{に戻した}}$$

例題 3 $2\int x^3e^{x^2}dx$

$x^2=t$ とおく。

$$\frac{dt}{dx}=2x \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$$

$$\text{与式}=2\int x^3e^{t}\frac{1}{2x}dt \longleftarrow \boxed{x\text{から}t\text{に置換した}}$$

$$=\int te^{t}dt$$

$$=\int t(e^{t})'dt \longleftarrow \boxed{e^{x}=(e^{x})'}$$

$$=te^{t}-\int e^{t}dt \longleftarrow \boxed{\begin{aligned}&\int f(x)g'(x)dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\end{aligned}}$$

$$=te^{t}-e^{t}+C$$

$$=x^2e^{x^2}-e^{x^2}+C \longleftarrow \boxed{t\text{から}x\text{に戻した}}$$

例題 4 $\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$

$$\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$$

$$=\int \frac{(e^{x}+e^{-x})'}{e^{x}+e^{-x}}dx \longleftarrow \boxed{-e^{-x}=(e^{-x})'}$$

$$=\log(e^{x}+e^{-x})+C \longleftarrow \boxed{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C}$$

↑

$e^{x}+e^{-x}>0$ なので
絶対値はいらない！

例題 5 $\int \frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$

$$\int \frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$$

$$=\int \frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}dx \longleftarrow \boxed{\times\frac{e^{x}}{e^{x}}}$$

Point !

$$=\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)+C \longleftarrow \boxed{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C}$$

↑

正なので絶対値はいらない！

例題 6 $\int xe^{x}dx$

$$\int xe^{x}dx$$

$$=\int x(e^{x})'dx \longleftarrow \boxed{e^{x}=(e^{x})'}$$

$$=xe^{x}-\int e^{x}dx \longleftarrow \boxed{\begin{aligned}&\int f(x)g'(x)dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\end{aligned}}$$

$$=xe^{x}-e^{x}+C$$

積分計算　練習問題 指数関数編②

例題7　$x^2e^x dx$

$$\int x^2e^x dx$$

$=\int x^2(e^x)'dx$ ← $e^x=(e^{x'})$

$= x^2e^x-2\int x e^x dx$ ← $\int f(x)g'(x)dx$ $=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

$= x^2e^x-2\left\{\int x(e^x)'dx\right\}$ ← $e^x=(e^x)'$

$$= x^2e^x-2\left\{xe^x-\int e^x dx\right\}$$

$$= x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C$$

$$= x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$

$$= x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$

例題8　$\int e^x\sin x\,dx$

$I=\int e^x\sin x\,dx$ とおく。

$I=\int (e^x)'\sin x\,dx$

$= e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ ← $\int f(x)g'(x)dx$ $=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

$$= e^x\sin x-\int (e^x)'\cos x\,dx$$

$= e^x\sin x-\left\{e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx\right\}$ ←

$= e^x\sin x-e^x\cos x-I$ ← 同じ I が出現！

$\therefore\ I=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$ ← I について解いた

例題9　$\int e^{-x}\cos 2x dx$

$I=\int e^{-x}\cos 2x\,dx$ とおく。

$I=\int (-e^{-x})'\cos 2x\,dx$ ← $-e^{-x}=(e^{-x})'$

$=-e^{-x}\cos 2x-\int (-e^{-x})(\cos 2x)'dx$ ← $\int f(x)g'(x)dx$ $=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

$$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx$$

$=-e^{-x}\cos 2x-2\int (-e^{-x})'\sin 2x\,dx$ ← $-e^{-x}=(e^{-x})'$

$=-e^{-x}\cos 2x-2\left\{-e^{-x}\sin 2x-\int (-e^{-x})(\sin 2x)'dx\right\}$ ← $\int f(x)g'(x)dx$ $=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

$$=-e^{-x}\cos 2x-2\left\{-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\,dx\right\}$$

$=-e^{-x}\cos 2x-2(-e^{-x}\sin 2x+2I)$ ← 同じ I が出現！

$\therefore\ I=\dfrac{e^{-x}}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)+C$ ← I について解いた

積分計算　練習問題 対数関数編①

例題1　$\int \frac{\log x}{x}dx$

$$\int \frac{\log x}{x}dx$$

$$=\int \frac{1}{x}\cdot \log x\,dx$$

$$=\int (\log x)'\cdot \log x\,dx \leftarrow \boxed{(\log x)'=\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{2}(\log x)^2+C \leftarrow \boxed{\int f'(x)f^{n}(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C}$$

例題2　$\int \frac{(\log x)^2}{x}dx$

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}dx$$

$$=\int \frac{1}{x}\cdot(\log x)^2 dx$$

$$=\int (\log x)'\cdot(\log x)^2 dx \leftarrow \boxed{(\log x)'=\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{3}(\log x)^3+C \leftarrow \boxed{\int f'(x)f^{n}(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C}$$

例題3　$\int \frac{1}{x\log x}dx$

$$\int \frac{1}{x\log x}dx$$

$$=\int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx$$

$$=\int \frac{(\log x)'}{\log x}dx \leftarrow \boxed{(\log x)'=\frac{1}{x}}$$

$$=\log\left|\log x\right|+C \leftarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C}$$

例題4　$\int \log x\,dx$

$$\int \log x dx$$

$$=\int (x)'\cdot\log x\,dx$$

$$=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx \leftarrow \boxed{\begin{aligned}&\int f(x)g'(x)dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\end{aligned}}$$

$$=x\log x-\int 1\,dx$$

$$=x\log x-x+C$$

例題5　$\int x^2\log x\,dx$

$$\int x^2\log x\,dx$$

$$\int \left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int f(x)g'(x)dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\end{aligned}}$$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\int \frac{x^3}{3}\cdot(\log x)'\,dx \leftarrow$$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx \leftarrow \boxed{(\log x)'=\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C \leftarrow \boxed{\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\quad(n\neq-1)}$$

例題6　$\int (\log x)^2 dx$

$$\int (\log x)^2 dx$$

$$=\int (x)'\cdot(\log x)^2 dx \qquad \boxed{\begin{aligned}&\int f(x)g'(x)dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\end{aligned}}$$

$$=x(\log x)^2-\int x\{(\log x)^2\}'\,dx \leftarrow$$

$$=x(\log x)^2-\int x\cdot 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\log x dx$$

$$=x(\log x)^2-2\int \log x dx \qquad \boxed{\begin{aligned}&\int f(x)g'(x)dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\end{aligned}}$$

$$=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C \leftarrow$$

この値は覚えておく！

$$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$$

積分計算 練習問題 対数関数編②

例題7 $\int \log(2x-1)\,dx$

$$\int \log(2x-1)\,dx$$

Point!

$$=\frac{1}{2}\left\{\int (2x-1)'\log(2x-1)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2x-1)\log(2x-1)-\int(2x-1)\{\log(2x-1)\}'dx\right\} \longleftarrow \boxed{\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2x-1)\log(2x-1)-\int(2x-1)\frac{2}{2x-1}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2x-1)\log(2x-1)-2\int dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2x-1)\log(2x-1)-2x\right\}+C$$

例題8 $\int \sin(\log x)\,dx$

$I=\int \sin(\log x)\,dx$ とおく。

$$I=\int (x)'\sin(\log x)\,dx$$

$$=x\sin(\log x)-\int x\{\sin(\log x)\}'dx \longleftarrow \boxed{\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx}$$

$$=x\sin(\log x)-\int x\cdot\frac{1}{x}\cos(\log x)\,dx \longleftarrow \boxed{\{\sin f(x)\}'=f'(x)\cos f(x)} - \boxed{(\log x)'=\frac{1}{x}}$$

$$=x\sin(\log x)-\int \cos(\log x)\,dx$$

$$=x\sin(\log x)-\int (x)'\cos(\log x)\,dx$$

$$=x\sin(\log x)-\left\{x\cos(\log x)-\int x\{\cos(\log x)\}'dx\right\}$$

$$=x\sin(\log x)-\left\{x\cos(\log x)+\int x\cdot\frac{1}{x}\sin(\log x)\,dx\right\}$$

$$=x\sin(\log x)-\left\{x\cos(\log x)+\int \sin(\log x)dx\right\} \longleftarrow \boxed{\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx}$$

$$=x\sin(\log x)-\{x\cos(\log x)+I\} \longleftarrow \boxed{\text{同じ}\ I\ \text{が出現！}}$$

$$2I=x\sin(\log x)-x\cos(\log x)$$

$$I=\frac{x}{2}\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C \longleftarrow \boxed{I\ \text{について解いた}}$$

積分計算 練習問題 三角関数編①

※積分定数は一部省略。

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\int \square\, dx$	例題1 $\int \sin x dx$ $\int \sin x dx = -\cos x$	例題2 $\int \cos x dx$ $\int \cos x dx = \sin x$	例題3 $\int \tan x dx$ $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ $= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$ $= -\log\lvert\cos x\rvert \leftarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\lvert f(x)\rvert + C$
$\int \square^2\, dx$	例題4 $\int \sin^2 x dx$ 与式 $= \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx \leftarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $= \frac{1}{2}\int 1 dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$ $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \leftarrow \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx + C$	例題5 $\int \cos^2 x dx$ 与式 $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx \leftarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $= \frac{1}{2}\int 1 dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$ $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \leftarrow \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx + C$	例題6 $\int \tan^2 x dx$ 与式 $= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \leftarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ $= \tan x - x \leftarrow \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int \square^3\, dx$	例題7 $\int \sin^3 x dx$ 与式 $= \int \sin x \sin^2 x dx \leftarrow$ 1乗を切り離す $= \int \sin x(1-\cos^2 x) dx \leftarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $= \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx$ $= -\cos x + \int (\cos x)' \cos^2 x dx$ $= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x \leftarrow \int f'(x) f^n(x) dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C$	例題8 $\int \cos^3 x dx$ 与式 $= \int \cos x \cos^2 x dx \leftarrow$ 1乗を切り離す $= \int \cos x(1-\sin^2 x) dx \leftarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $= \int \cos x dx - \int \cos x \sin^2 x dx$ $= \sin x - \int (\sin x)' \sin^2 x dx$ $= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x \leftarrow \int f'(x) f^n(x) dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C$	例題9 $\int \tan^3 x dx$ 与式 $= \int \tan x \cdot \tan^2 x dx \leftarrow$ 1乗を切り離す $= \int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \leftarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ $= \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x dx - \int \tan x dx$ $= \int (\tan x)' \tan x dx + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\lvert f(x)\rvert + C$ $= \frac{\tan^2 x}{2} + \log\lvert\cos x\rvert \leftarrow \int f'(x) f^n(x) dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C$
$\int \square^4\, dx$	例題10 $\int \sin^4 x dx$ 与式 $= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \leftarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx$ $= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx \leftarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x \leftarrow \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx + C$ $= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$	例題11 $\int \cos^4 x dx$ 与式 $= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \leftarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx$ $= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx \leftarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $= \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x \leftarrow \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx + C$ $= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$	例題12 $\int \tan^4 x dx$ 与式 $= \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x dx \leftarrow$ 2乗を切り離す $= \int \tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \leftarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ $= \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \leftarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ $= \int \tan^2 x (\tan x)' dx - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$ $= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x \leftarrow \int f'(x) f^n(x) dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C$

積分計算 練習問題 三角関数編②

※積分定数は一部省略。

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\int \square^{5} dx$	例題13 $\int \sin^5 x dx$ 与式$=\int \sin x(\sin^2 x)^2 dx$ $=\int \sin x(1-\cos^2 x)^2 dx \leftarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$ $=\int \sin x dx-2\int \sin x\cos^2 x dx+\int \sin x\cos^4 x dx$ $=\int \sin x dx+2\int (\cos x)'\cos^2 x dx-\int (\cos x)'\cos^4 x dx$ $=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x \leftarrow \int f'(x)f^n(x)dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C$	例題14 $\int \cos^5 x dx$ 与式$=\int \cos x(\cos^2 x)^2 dx$ $=\int \cos x(1-\sin^2 x)^2 dx \leftarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$ $=\int \cos x dx-2\int \cos x\sin^2 x dx+\int \cos x\sin^4 x dx$ $=\int \cos x dx-2\int (\sin x)'\sin^2 x dx+\int (\sin x)'\sin^4 x dx$ $=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x \leftarrow \int f'(x)f^n(x)dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C$	例題15 $\int \tan^5 x dx$ 漸化式を用いて解けるが省略。
$\int \frac{1}{\square} dx$	例題16 $\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}=\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$ $\leftarrow$ $\frac{\sin x}{\sin x}$をかける Point ! $\cos x=t$ とおくと $dx=-\frac{1}{\sin x}dt$ 与式$=\int \frac{\sin x}{(1-t)(1+t)}\left(-\frac{1}{\sin x}dt\right) \leftarrow$ xからtに置換した $=-\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt$ $=-\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt \leftarrow$ 部分分数に分解 $=-\frac{1}{2}\int \left\{-\frac{(1-t)'}{1-t}+\frac{(1+t)'}{1+t}\right\}dt$ $=-\frac{1}{2}(-\log\lvert 1-t\rvert+\log\lvert 1+t\rvert)dt \leftarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log\lvert f(x)\rvert+C$ $=-\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1+t}{1-t}\right\rvert=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) \leftarrow \log A-\log B=\log\frac{A}{B}$	例題17 $\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$ $\leftarrow$ $\frac{\cos x}{\cos x}$をかける Point ! $\sin x=t$ とおくと $dx=\frac{1}{\cos x}dt$ 与式$=\int \frac{\cos x}{(1+t)(1-t)}\left(\frac{1}{\cos x}dt\right) \leftarrow$ xからtに置換した $=\int \frac{1}{(1+t)(1-t)}dt$ $=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt \leftarrow$ 部分分数に分解 $=\frac{1}{2}\int \left\{\frac{(1+t)'}{1+t}-\frac{(1-t)'}{1-t}\right\}dt$ $=\frac{1}{2}(\log\lvert 1+t\rvert-\log\lvert 1-t\rvert)dt \leftarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log\lvert f(x)\rvert+C$ $=\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1+t}{1-t}\right\rvert=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \leftarrow \log A-\log B=\log\frac{A}{B}$	例題18 $\int \frac{1}{\tan x}dx$ $\int \frac{1}{\tan x}dx$ $=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx \leftarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$ $=\log\lvert\sin x\rvert \leftarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log\lvert f(x)\rvert+C$
$\int \frac{1}{\square^{2}} dx$	例題19 $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $x=\frac{\pi}{2}-\theta$とおくと $dx=-d\theta$ $\leftarrow$ $\cos\theta$ に変換 Point ! 与式$=\int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}(-d\theta) \leftarrow$ xからθに置換した $=-\int \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $=-\tan\theta$ $=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \leftarrow$ θからxに戻した $=-\frac{1}{\tan x} \leftarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$	例題20 $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x$	例題21 $\int \frac{1}{\tan^2 x}dx$ 与式$=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx \leftarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx \leftarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$ $=\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$ $=-\frac{1}{\tan x}-x \leftarrow$ 例題19を参照

積分計算 練習問題 三角関数編③

例題22 $\int \sin x\ \cos x dx$

$$\int \sin x\ \cos x dx$$

$$=\int \frac{1}{2}\sin 2x dx \longleftarrow \boxed{\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C \longleftarrow \boxed{\int \sin nx dx=-\frac{1}{n}\cos nx+C}$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

別解

$$=\int \sin x(\sin x)'dx \longleftarrow \boxed{\cos x=(\sin x)'}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2 x+C \longleftarrow \boxed{\int f'(x)f^n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C}$$

例題23 $\int \cos x\cos 4x dx$

$$\int \cos x\cos 4x dx$$

$$=\int \frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 3x)\ dx \longleftarrow \boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos 5x dx+\frac{1}{2}\int \cos 3x dx$$

$$=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x+C \longleftarrow \boxed{\int \cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx+C}$$

例題24 $\int \sin 3x\cos 2x dx$

$$\int \sin 3x\cos 2x dx$$

$$=\int \frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)\ dx \longleftarrow \boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin 5x dx+\frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right)+\frac{1}{2}(-\cos x)+C \longleftarrow \boxed{\int \sin nx dx=-\frac{1}{n}\cos nx+C}$$

$$=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C$$

例題25 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\ dx \longleftarrow \boxed{\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}\ dx \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l}0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\text{ のとき }\sin\frac{x}{2}\geqq 0\\ \sqrt{a^2}=|a|=a\ \ (a>0)\text{ より}\end{array}}$$

$$=\sqrt{2}\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \longleftarrow \boxed{\int \cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx+C}$$

$$=\sqrt{2}\left(-2\cos\frac{\pi}{4}+2\cos 0\right)$$

$$=\sqrt{2}(-\sqrt{2}+2)=-2+2\sqrt{2}$$

例題26 $\int \sin(2x-1)dx$

$$\int \sin(2x-1)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(2x-1)dx+C \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l}\int \sin(ax+b)\ dx\\ =-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C\end{array}}$$

例題27 $\int \sin^3 x\cos x dx$

$$\int \sin^3 x\cos x dx$$

$$=\int \sin^3 x(\sin x)'dx \longleftarrow \boxed{\cos x=(\sin x)'}$$

$$=\frac{1}{4}\sin^4 x+C \longleftarrow \boxed{\int f'(x)f^n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C}$$

積分計算 練習問題 三角関数編④

例題28 $\int \sin x \cos x \sqrt{\sin^2 x+1}\,dx$

$$\int \sin x \cos x \sqrt{\sin^2 x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int (\sin^2 x+1)'\sqrt{\sin^2 x+1}\,dx \longleftarrow \boxed{(\sin^2 x)'=2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\int (\sin^2 x+1)'(\sin^2 x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}(\sin^2 x+1)^{\frac{3}{2}}+C \longleftarrow \boxed{\int f'(x)f^n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C}$$

$$=\frac{1}{3}(\sin^2 x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

例題29 $\int \frac{\cos x+1}{\sin x+x}dx$

$$\int \frac{\cos x+1}{\sin x+x}dx$$

$$=\int \frac{(\sin x+x)'}{\sin x+x}dx \longleftarrow \boxed{\cos x=(\sin x)'}$$

$$=\log|\sin x+x|+C \longleftarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C}$$

例題30 $\int x\sin x\,dx$

$$\int x\sin x\,dx$$

$$=\int x(-\cos x)'dx \longleftarrow \boxed{\sin x=(-\cos x)'}$$

$$=x(-\cos x)-\int (x)'(-\cos x)\,dx \longleftarrow \boxed{\begin{aligned}&\int f(x)g'(x)\,dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx\end{aligned}}$$

$$=-x\cos x+\int \cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C$$

例題31 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx$$

$x=\frac{\pi}{2}-\theta$ とおく。 ← sinからcosに変換する置換！

$$\frac{dx}{d\theta}=-1 \Leftrightarrow dx=-d\theta$$

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$$\text{与式}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}(-d\theta)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta \longleftarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta \longleftarrow \boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \longleftarrow \boxed{\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \longleftarrow \boxed{\begin{aligned}&0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\text{ のとき }\cos\frac{x}{2}\geqq 0\\&\sqrt{a^2}=|a|=a\ \ (a>0)\text{ より}\end{aligned}}$$

$$=\sqrt{2}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\left(2\sin\frac{\pi}{4}+2\sin 0\right)$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}-0)$$

$$=2$$