2006 年度　本試験　数学 II・B 第１問

〔１〕

〔１〕

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ の範囲で関数 $f(\theta) = 3\cos 2\theta + 4\sin\theta$ を考える。

$\sin\theta = t$ とおけば

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}}$$

であるから，$y = f(\theta)$ とおくと

$$y = -\boxed{\text{エ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{オ}}\, t + \boxed{\text{カ}}$$

である。したがって，y の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{3}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また，α が $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ を満たす角度で $f(\alpha) = 3$ のとき

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

〔２〕

〔２〕

不等式

$$2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立つような x の範囲を求めよう。

(1)　不等式 (*) において，x は対数の底であるから

$$x > \boxed{\text{セ}} \text{ かつ } x \neq \boxed{\text{ソ}}$$

を満たさなければならない。また

$$\log_x 27 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 x}$$

である。

(2)　不等式 (*) は

$\boxed{\text{セ}} < x < \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \geqq 0$$

$x > \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \leqq 0$$

と変形できる。したがって，求める x の値の範囲は

$\boxed{\text{セ}} < x \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，　$\boxed{\text{ソ}} < x \leqq \boxed{\text{ヌネ}}$

である。

第２問

新教育課程履修者…【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】【６】…選択問題（２題選択）
旧教育課程履修者…【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】【６】【７】【８】…選択問題（２題選択）

a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする。

C_1 ：$y = x^2$

C_2 ：$y = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする。

(1)　点 $(t\,,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^{\boxed{\text{イ}}}$

であり，この直線が C_2 に接するのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。

したがって，直線 l の方程式は

$y = \boxed{\text{エ}}\,x - \boxed{\text{オ}}$

であり，l と C_2 の接点の座標は

$(\boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{ク}}\,,\ \boxed{\text{ケコ}} + \boxed{\text{サ}})$

である。

(2)　C_1 と C_2 の交点を P とすると，P の座標は

$(a + \boxed{\text{シ}}\,,\ (a + \boxed{\text{シ}})^2)$

である。点 P を通って直線 l に平行な直線を m とする。直線 m の方程式は

$y = \boxed{\text{ス}}\,x + a^{\boxed{\text{セ}}} - \boxed{\text{ソ}}$

である。直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は $a > \boxed{\text{タ}}$ である。

$a > \boxed{\text{タ}}$ のとき，C_1 の $x \geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$S = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}(\boxed{\text{テ}} + 1)^{\boxed{\text{ト}}}(\boxed{\text{ナニ}} - 1)$

と表される。

第３問

a，b，c を相異なる実数とする。数列 $\{x_n\}$ は等差数列で，最初の 3 項が順に a，b，c であるとし，数列 $\{y_n\}$ は等比数列で，最初の 3 項が順に c，a，b であるとする。

(1)　b と c は a を用いて

$$b=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a,\quad c=\boxed{\text{エオ}}\,a$$

と表され，等差数列 $\{x_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}a$ である。

(2)　等比数列 $\{y_n\}$ の公比は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，$\{y_n\}$ の初項から第 8 項までの和は，a を用いて

$$\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}a$$

と表される。

(3)　数列 $\{z_n\}$ は最初の 3 項が順に b，c，a であり，その階差数列 $\{w_n\}$ が等差数列であるとする。このとき，$\{w_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a$ であり，$\{w_n\}$ の一般項は

$$w_n=\frac{\boxed{\text{タ}}\,n-\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a$$

である。したがって，数列 $\{z_n\}$ の一般項は，a を用いて

$$z_n=\frac{a}{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナ}}\,n^2-\boxed{\text{ニヌ}}\,n+\boxed{\text{ネノ}}\right)$$

と表される。

第４問

)

平面上の三つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|=1$$

を満たし，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ であるとする。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。また

$$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{オカ}}^\circ$ である。

(2)　ベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$$\vec{c}=\frac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}(\vec{a}+\boxed{ケ}\,\vec{b})$$

である。

(3)　x，y を実数とする。ベクトル $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{c}$ が

$$0 \leqq \vec{p}\cdot\vec{a} \leqq 1,\quad 0 \leqq \vec{p}\cdot\vec{b} \leqq 1$$

を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{コ} \leqq x \leqq \boxed{サ},\quad x \leqq \sqrt{\boxed{シ}}\,y \leqq x+\boxed{ス}$$

である。x と y が上記の範囲を動くとき，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ は最大値 $\sqrt{\boxed{セ}}$ をとり，この最大値をとるときの $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$$\vec{p}=\boxed{ソ}\,\vec{a}+\boxed{タ}\,\vec{b}$$

である。

第５問　〔１〕

〔１〕

次の資料は 2 科目の小テストに関する 5 人の生徒の得点を記録したものである。2 科目の小テストの得点をそれぞれ変量 x，y とする。

生徒番号	1	2	3	4	5
x	3	4	5	4	4
y	7	9	10	8	6

以下，計算結果の小数表示では，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合は，指定された桁まで⓪にマークすること。

(1)　変量 x の分散を小数で求めると，$\boxed{ア}.\boxed{イ}$ となる。

(2)　変量 y を使って新しい変量 t を

$$t=y-\boxed{ウ}$$

で定めると，変量 t の平均は 0 になる。

(3)　変量 y を使って新しい変量 u を

$$u=\frac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}\,y$$

で定めると，変量 u の分散は x の分散と同じになる。

(4)　変量 x と変量 y の相関係数を r，変量 x と変量 u の相関係数を r' とし，それぞれの 2 乗を r^2 と $(r')^2$ で表すと

$$r^2 = \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キク}}$$

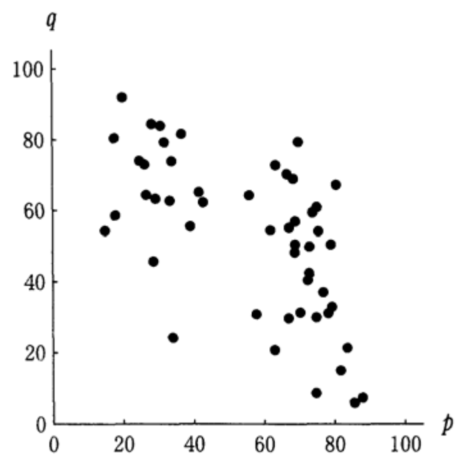
$$(r')^2 = \boxed{\text{ケ}}.\boxed{\text{コサ}}$$

となる。

〔2〕

〔2〕

変量 p と変量 q を観測した資料に対して，相関図（散布図）を作ったところ，次のようになった。ただし，相関図（散布図）中の点は，度数 1 を表す。



(1)　二つの変量 p と q の相関係数に最も近い値は $\boxed{\text{シ}}$ である。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

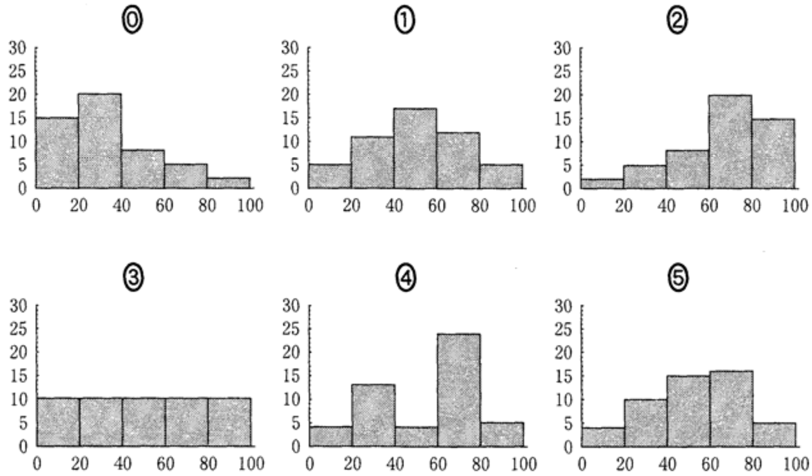
⓪　-1.5　　①　-0.9　　②　-0.6　　③　0.0

④　0.6　　⑤　0.9　　⑥　1.5

(2)　同じ資料に対して度数をまとめた相関表を作ったところ，次のようになった。例えば，相関表中の 7 の 7 という数字は，変量 p の値が 60 以上 80 未満で変量 q の値が 20 以上 40 未満の度数が 7 であることを表している。

q \ p	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
80–100	2	3	0	0	0
60–80	0	7	3	5	1
40–60	2	2	0	11	0
20–40	0	1	1	7	1
0–20	0	0	0	1	3

このとき，変量 p のヒストグラムは $\boxed{\text{ス}}$ であり，変量 q のヒストグラムは $\boxed{\text{セ}}$ である。$\boxed{\text{ス}}$ ，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。



第６問

2 以上の自然数 n を素因数分解し，その結果を出力するプログラムを作成した。

〔プログラム〕

```
100  INPUT PROMPT ” n=” : N
110  LET I・2
120  IF [ ア ] THEN
130     LET I・I・1
140     GOTO [イウエ]
150  END IF
160  LET N・N・I
170  IF N・1 THEN
180     PRINT I
190     GOTO [オカキ]
200  END IF
210  PRINT I;” *”;
220  GOTO [イウエ]
230  END
```

ただし，100 行，110 行，160 行は，それぞれ次の各行と同じ意味である。

```
100  INPUT ” n=”; N
110  I・2
160  N・N・I
```

また，120 行～150 行は

```
120  IF [ア] THEN I・I・1:GOTO [イウエ]
```

と同じ意味であり，170 行～200 行は

```
170  IF N・1 THEN PRINT I:GOTO [オカキ]
```

と同じ意味である。

(1)　$\boxed{\text{ア}}$ は「N は I で割り切れない」ということを意味する条件である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。ただし，INT(X)は X を超えない最大の整数を表す。

⓪　N・INT(I・N)・N・0　　①　N・INT(N・I)・I・0
②　N・INT(I・N)・I・0　　③　N・INT(I・N)・N・・0
④　N・INT(N・I)・I・・0　　⑤　N・INT(I・N)・I・0

(2)　プログラム中の $\boxed{\text{イウエ}}$，$\boxed{\text{オカキ}}$ に当てはまる行番号を入れよ。

(3)　プログラムを実行し，変数 N に 60 を入力したとき，160 行は $\boxed{\text{ク}}$ 回実行され，180 行は $\boxed{\text{ケ}}$ 回実行される。また，変数 N に 61 を入力したとき，160 行は $\boxed{\text{コ}}$ 回実行され，180 行は $\boxed{\text{サ}}$ 回実行される。

$\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　0　　①　1　　②　2　　③　3
④　4　　⑤　59　　⑥　60　　⑦　61

(4)　n を素数でない自然数とする。このプログラムを変更し，n の約数のうち素数であるものを，重複なく順に出力するようにするには，160 行を削除して次の 161 行～164 行を追加し，さらに 210 行の”*”を”，”と変更すればよい。

```
161  IF N・INT(N・I)・I・0 THEN
162      LET [シ]
163      GOTO [スセソ]
164  END IF
```

このとき，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪　N・N・I　　①　N・N・I　　②　N・I・N　　③　N・N・I
④　I・I・N　　⑤　I・I・N　　⑥　I・N・I　　⑦　I・I・N

また，$\boxed{\text{スセソ}}$ に当てはまる行番号を入れよ。

第 7 問

複素数 $z = x + yi$ は $y > 0$ を満たすとする。複素数平面上で z を表す点を P，0 を表す点を O，1 を表す点を A とする。点 B は直線 OA に関して P と同じ側にあり，△OAB は正三角形であるとする。点 Q は直

線OPに関してAと反対側にあり，△OPQは正三角形であるとする。また，点Rは直線APに関してOと反対側にあり，△PARは正三角形であるとする。点Q，Rが表す複素数をそれぞれz_1，z_2とする。

(1)　点Bが表す複素数βは

$$\beta=\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イ}}\,i}{\boxed{ウ}}$$

である。点Qは，PをOのまわりに$\boxed{エオ}$°だけ回転した点であるから$z_1=\boxed{カ}$である。$\boxed{カ}$に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　βz　　①　$\dfrac{z}{\beta}$　　②　$-\beta z$　　③　$-\dfrac{z}{\beta}$

④　$z+\beta$　　⑤　$z+\dfrac{1}{\beta}$

点Rは，AをPのまわりに$\boxed{エオ}$°だけ回転した点であるから，$z_2=\boxed{キ}$である。$\boxed{キ}$に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$z+\beta(1-z)$　　①　$\beta(1-z)$　　②　$1+\beta(1-z)$　　③　$z+\dfrac{1-z}{\beta}$

④　$\dfrac{1-z}{\beta}$　　⑤　$1+\dfrac{1-z}{\beta}$

したがって，$w=\dfrac{z_1-\beta}{z_2-\beta}$とおくと

$$w=\frac{\boxed{クケ}+\sqrt{\boxed{コ}}\,i}{\boxed{サ}}\cdot\frac{z-1}{z}$$

である。

(2)　BQとBRが垂直に交わるのはwが純虚数のときであり，このとき，点Pはつねに$\dfrac{\boxed{シ}-\sqrt{\boxed{ス}}\,i}{\boxed{セ}}$を表す点を中心とする半径$\boxed{ソ}$の円周上にある。

第８問

1個のさいころを4回続けて投げる反復試行を行う。$i=1,2,\cdots,6$それぞれについて，iの目の出た回数をZ_iとする。ただし，4回投げてiの目が一度も出ない場合には，$Z_i=0$とする。$Z_1,Z_2,\cdots,Z_6$の値の最大値をXとし，$Z_1,Z_2,\cdots,Z_6$の値のうち1以上のものの最小値をYとする。例えば，出た目が4，4，2，6のときは，$Z_1=0$，$Z_2=1$，$Z_3=0$，$Z_4=2$，$Z_5=0$，$Z_6=1$であり，$X=2$，$Y=1$である。

以下では，$Y=k$となる確率を$P(Y=k)$で表す。

(1)　$P(Y=4)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウエ}}$である。

(2)　$P(Y=2)=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である。

(3)　$P(Y=k)>0$ となる k は $\boxed{ク}$ 個あり，$P(Y=1)=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}}$ である。また，Y の平均は $\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタ}}$ で，

分散は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

(4)　$X \geqq 2$ となる条件のもとで，$Y=1$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌ}}$ である。

【解答１】第１問　〔１〕

〔１〕

ア−イ$t^{ウ}$，$1-2t^2$　　　−エ$t^{ウ}$+オt+カ，$-6t^2+4t+3$

$\dfrac{キク}{3}$，$\dfrac{11}{3}$　　　ケ，1

$\dfrac{コ\sqrt{サ}+\sqrt{シ}}{ス}$，$\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{6}$

〔２〕

〔２〕

(1)　セ，0　　ソ，1　　$\dfrac{タ}{\log_3 x}$，$\dfrac{3}{\log_3 x}$

(2)　チ$(\log_3 x)^2$−ツ$\log_3 x$−テト，$2(\log_3 x)^2-5\log_3 x-12$

$\dfrac{\sqrt{ナ}}{ニ}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$　　ヌネ，81

第２問

(1)　ア，2　　$-t^{イ}$，$-t^2$　　ウ，1　　エx−オ，$2x-1$

カキ+ク，2a+1　　ケコ+サ，4a+1

(2)　シ，1　　スx+$a^{セ}$−ソ，$2x+a^2-1$　　タ，1

$\dfrac{チ}{ツ}$，$\dfrac{1}{3}$　　(テ+1)^{ト}(ナニ−1)，$(a+1)^2(2a-1)$

第３問

(1)　$\dfrac{アイ}{ウ}$，$\dfrac{-1}{2}$　　エオ，−2

$\dfrac{カキ}{ク}$，$\dfrac{-3}{2}$

(2) $\dfrac{\text{ケコサ}}{\text{シス}}$, $\dfrac{-85}{64}$

(3) $\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$, $\dfrac{9}{2}$ $\dfrac{\text{タ}n-\text{チツ}}{\text{テ}}$, $\dfrac{9n-12}{2}$

$\dfrac{a}{\text{ト}}(\text{ナ}n^2-\text{ニヌ}n+\text{ネノ})$, $\dfrac{a}{4}(9n^2-33n+22)$

第４問

(1) $\dfrac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$, $\dfrac{-1}{2}$ $\sqrt{\text{エ}}$, $\sqrt{3}$ オカ°, 90°

(2) $\dfrac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}(\vec{a}+\text{ケ}\vec{b})$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$

(3) コ，0 サ，1 $\sqrt{\text{シ}}$, $\sqrt{3}$ ス，2

$\sqrt{\text{セ}}$, $\sqrt{3}$ $\text{ソ}\vec{a}+\text{タ}\vec{b}$, $2\vec{a}+2\vec{b}$

第５問 〔１〕

〔１〕

(1) ア.イ，0.4

(2) $y-\text{ウ}$, $y-8$

(3) $\dfrac{\sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}y$, $\dfrac{\sqrt{5}}{5}y$

(4) カ.キク，0.45 ケ.コサ，0.45

〔２〕〔２〕

(1) シ，2

(2) ス，4 セ，5

第６問

(1) ア，4

(2) イウエ，120 オカキ，230

(3) ク，4 ケ，1 コ，1 サ，1

(4) シ，0 スセソ，161

第７問

(1) $\dfrac{\text{ア}+\sqrt{\text{イ}}i}{\text{ウ}}$, $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ エオ°, 60°

カ，0 キ，0

$\dfrac{\text{クケ}+\sqrt{\text{コ}}i}{\text{サ}}$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

(2) $\dfrac{\text{シ}-\sqrt{\text{ス}}i}{\text{セ}}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ソ，1

第８問

(1) $\dfrac{\text{ア}}{\text{イウエ}}$, $\dfrac{1}{216}$

(2) $\dfrac{\text{オ}}{\text{カキ}}$, $\dfrac{5}{72}$

(3) ク, 3 $\dfrac{\text{ケコ}}{\text{サシ}}$, $\dfrac{25}{27}$ $\dfrac{\text{スセ}}{\text{ソタ}}$, $\dfrac{13}{12}$ $\dfrac{\text{チ}}{\text{ツテ}}$, $\dfrac{5}{48}$

(4) $\dfrac{\text{トナ}}{\text{ニヌ}}$, $\dfrac{35}{39}$