2005 年度　本試験　数学 II·B

第１問　〔１〕

〔１〕

座標平面上の 3 点

$$A(-1,\ 0),\quad B(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad C(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$$

について，θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき

$$d = AC + BC$$

の最大値と最小値を求めよう。

(1)

$$AC^2 = \boxed{\text{ア}} + 2\cos 2\theta$$
$$= \boxed{\text{イ}} \cos^2\theta$$
$$BC^2 = \boxed{\text{ウ}} - 2\cos\theta$$
$$= \boxed{\text{エ}} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

であるから

$$d = \boxed{\text{オ}}\ |\cos\theta| + \boxed{\text{カ}} \sin\frac{\theta}{2}$$

である。

(2)　$t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおく。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$d = -\boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t + 2$ である。

$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq t \leqq 1$ であり，$d = \boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t - 2$ である。

したがって，d は $t = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。また，d は $t = \boxed{\text{タ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{チ}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{ツテト}}^\circ$ である。

〔２〕

〔２〕

x，y，z は正の数で $2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$ を満たしているとする。このとき

$$a=2x,\quad b=\frac{5}{2}y,\quad c=3z$$

とおき，a，b，c の大小関係を調べよう。

(1)　$x=y(\log_2\boxed{\text{ナ}}-\boxed{\text{ニ}})$ であるから

$$b-a=y\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2}-2\log_2\boxed{\text{ナ}}\right)$$

である。したがって，a と b を比べると $\boxed{\text{ネ}}$ の方が大きい。

(2)　$x=z\log_2\boxed{\text{ノ}}$ であるから

$$c-a=z(3-2\log_2\boxed{\text{ノ}})$$

である。したがって，a と c を比べると $\boxed{\text{ハ}}$ の方が大きい。

(3)　$3^5<\left(\frac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると，a，b，c の間には大小関係

$$\boxed{\text{ヒ}}<\boxed{\text{フ}}<\boxed{\text{ヘ}}$$

が成り立つことがわかる。

第２問

【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】【６】…選択問題（２題選択）

a を定数とし，放物線

$$y=x^2+2ax-a^3-2a^2$$

を C，その頂点を P とする。

(1)　頂点 P の座標は

$$(\boxed{\text{アイ}},\ -a^{\boxed{\text{ウ}}}-\boxed{\text{エ}}a^2)$$

である。したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は

$$y=x^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}x^2$$

のグラフ上にある。

(2)　a が $-3\leqq a<1$ の範囲を動くとする。頂点 P の y 座標の値が最大となるのは $a=\boxed{\text{キ}}$ と $a=\boxed{\text{クケ}}$ のときであり，最小となるのは $a=\boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3)　a の値を(2)で求めた $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{クケ}}$，$\boxed{\text{コサ}}$ とするときの放物線 C をそれぞれ C_1，C_2，C_3 とする。放物線 C_2，C_3 の方程式は

$$C_2:y=x^2-\boxed{\text{シ}}x+\boxed{\text{ス}}$$

$$C_3:y=x^2-\boxed{\text{セ}}x$$

である。

このとき

C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$

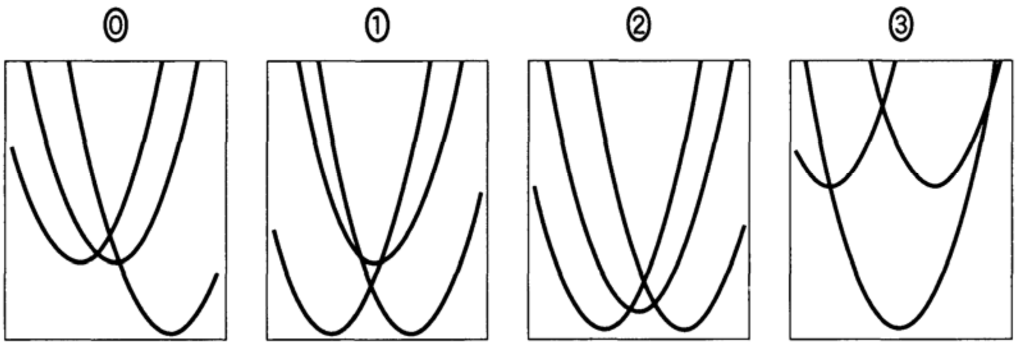
C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{2}$

である。

(4)　C_1，C_2，C_3 を座標平面上に図示したとき，それらの位置関係を表す最も適当なものは，次の図⓪～③のうち $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし，座標軸や曲線名は省略してある。

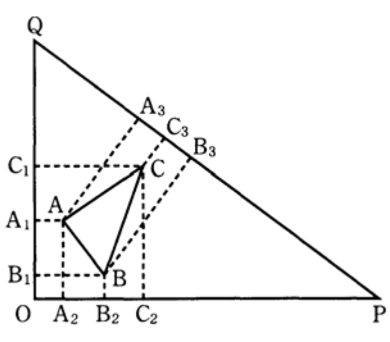
三つの放物線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。



第３問

座標平面上の 3 点 O(0 , 0)，P(4 , 0)，Q(0 , 3) を頂点とする三角形 OPQ の内部に三角形 ABC があるとする。A，B，C から直線 OQ に引いた垂線と OQ との交点をそれぞれ A_1，B_1，C_1 とする。A，B，C から直線 OP に引いた垂線と OP との交点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とする。A，B，C から直線 PQ に引いた垂線と PQ との交点をそれぞれ A_3，B_3，C_3 とする。

A_1 が線分 B_1C_1 の中点であり，B_2 が線分 A_2C_2 の中点であり，C_3 が線分 A_3B_3 の中点であるとする。



$\overrightarrow{AB} = (x\,,\ y)$，$\overrightarrow{AC} = (z\,,\ w)$ とおく。A_1 が線分 B_1C_1 の中点であるから $w = \boxed{\text{ア}}\,y$ である。B_2 が線

分 A_2C_2 の中点であるから $z=\boxed{\text{イ}}\,x$ である。線分 AB の中点を D とすると，C_3 が線分 A_3B_3 の中点であるから

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ウ}}$$

である。また

$$\overrightarrow{PQ}=(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}),\quad \overrightarrow{CD}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{AC})$$

であるから

$$y=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),\quad \overrightarrow{AC}=x\left(\boxed{\text{イ}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。ゆえに

$$AC=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}AB,\quad \cos\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

第４問

二つの複素数 p，q と三つの異なる複素数 α，β，γ は

$\alpha+\beta+\gamma=0$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ ①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ ②

$\alpha\beta\gamma=q$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ ③

を満たすとする。複素数 α，β，γ が複素数平面上で表す点をそれぞれ A，B，C とし，三角形 ABC は，AB＝AC の直角二等辺三角形であるとする。

このとき

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boxed{\text{アイ}}^\circ,\quad \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\boxed{\text{ウ}}$$

である。ここで，複素数 z の偏角 $\arg z$ は $-180^\circ\leqq\arg z<180^\circ$ を満たすとする。

以下 $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるとする。このとき，①を用いると

$$\beta=\frac{\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}\,i}{\boxed{\text{キ}}}\alpha,\quad \gamma=\frac{\boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}}\,i}{\boxed{\text{サ}}}\alpha$$

である。

さらに，②，③から

$$p=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\alpha^{\boxed{\text{セ}}},\quad q=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\alpha^{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって，p と q は

$$\boxed{ツテ}\,p^{\boxed{ト}}=\boxed{ナニ}\,q^{\boxed{ヌ}}$$

を満たさなければならない。

さらに，複素数平面上に点Dがあり，四角形ABDCが正方形であるとき，Dを表す複素数は $\boxed{ネノ}\,\alpha$ である。

第５問

さいころを最大5回まで投げ，目の出方に応じてポイントを得る次のゲームをDさんがおこなう。Dさんは最初 a ポイントもっている。

さいころを投げて，5または6の目が出る事象を A とする。事象 A が初めて起こった時点では1ポイントを得て引き続きゲームを続行し，2度目に事象 A が起これば2ポイントが加算されて合計3ポイントを得て，その時点でゲームを終了する。なお，さいころを5回投げても，事象 A が一度しか起こらない場合には，1度目に得た1ポイントのままで終了する。もし5回投げても事象 A が一度も起こらない場合には，あらかじめ定めた m ポイントが減点されて終了する。ただし，a と m は自然数で，$a \geqq m$ とする。

このゲームが終了した時点でのDさんのもつポイント数を確率変数 X とする。

(1)　$X=a+1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{243}$ である。

(2)　ちょうど4回目でゲームが終了する確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ であり，終了する時点が4回目または5回目となる確率は $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケ}}$ である。

(3)　3回目までに一度も事象 A が起こらない確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ である。

また, 3回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X>a$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ である。

(4)　確率変数 X の平均（期待値）は

$$E(X)=a+\frac{\boxed{ソタチ}-\boxed{ツテ}\,m}{243}$$

で，$E(X)>a$ となるような最大の自然数 m は $\boxed{トナ}$ である。

第６問

ある銀行では毎期末に預金残高に対し5%の利率で利息がつく。この銀行に，たとえばa万円を一期間預金すると，期末には$1.05\times a$万円の預金残高になることになる。

第1期の初めに，Aさんはこの銀行にb万円の預金を持っている。Aさんは，まずb万円から第1期分m万円を引き出す。残りの預金に対し第1期末に5%の利息がつく。ここで，$b>m$とする。第2期目からも毎期初めにこの預金からm万円ずつを引き出す予定である。ただし，預金残高がm万円に満たないときには，その金額を引き出すものとする。

以下の問題中，INT(X)はXを越えない最大の整数を表す関数である。

(1)

預金残高が0円になるのに何期間を要するかを調べるため，次の〔プログラム1〕を作った。このプログラムでは，自然数bとmを与えるとき，第n期初めに預金を引き出した直後に預金残高が0円になれば，そのときの自然数nを出力する。

〔プログラム1〕

```
100  INPUT ”B・”;B
110  INPUT ”M・”;M
120  N・0
130  N・N・1
140  B・1.05・(B・M)
150  IF B・0 THEN GOTO [アイウ]
160  PRINT N
170  END
```

このプログラムの空欄$\boxed{\text{アイウ}}$をうめて，プログラムを完成せよ。

(2)

このプログラムの160行を変更して，最終期の引き出し金額の1万円未満を切り捨てたものも出力するようにするには，160行を$\boxed{\text{エ}}$と変更すればよい。ただし，この金額の単位は万円とする。また，$\boxed{\text{エ}}$については，当てはまるものを，次の⓪～⑤から一つ選べ。

⓪ PRINT N,INT(B)　　① PRINT N,INT(B・M)
② PRINT N,INT(B・M)　　③ PRINT N,INT(1.05・B)
④ PRINT N,INT(B・1.05・M)　　⑤ PRINT N,INT(B・1.05・M)

(3)

第1期初めの預金額を2150万円，引き出し額を100万円とすると，第1期末の預金残高は，約2152万円となり，第1期初めの2150万円より増える。

一般に，毎期の初めにm万円引き出すものとし，第n期末の預金残高をc_n万円とする。このとき，$c_{n+1}=1.05(c_n-m)$であるので

$$c_{n+1}-c_n=1.05(c_n-c_{n-1}),\quad n=1,\ 2,\ \Lambda$$

が成り立つ。ただし，$c_0=2150$とする。

よって，$c_1-c_0 \geqq 0$ならば，預金残高は減少しないことがわかる。ここで，c_1はmとc_0によって決まり，$c_1-c_0 \geqq 0$を満たす最大の自然数mは［オカキ］である。

(4)

次に，A さんの預金残高がn期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額b万円を計算するため，次の〔プログラム 2〕を作った。このプログラムでは，自然数nとmを与えるとき，預金残高がn期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額b万円を計算する。ただし，$n \geqq 2$とする。

〔プログラム 2〕

```
100  INPUT ”N・”;N
110  INPUT ”M・”;M
120  I・N
130  B・M
140  B・B・1.05・M
150  I・I・1
160  IF I・1 THEN GOTO [クケコ]
170  PRINT [サ]
180  END
```

このプログラムの空欄［クケコ］と［サ］をうめて，このプログラムを完成せよ。ただし，［サ］については，当てはまるものを，次の⓪～④から一つ選べ。

⓪ INT(B)　　① INT(B・1.05)
② INT(B・1.05・1)　　③ INT(B・1)
④ INT((B・1)・1.05)

このプログラムを実行してN・?に対し 3，M・?に対し 90 を入力したとき，170 行において［シスセ］と出力される。このとき，140 行は［ソ］回実行される。

【解答１】

第１問　〔１〕

〔１〕

ア，2	イ，4	ウ，2	エ，4
オ，2	カ，2	$\frac{\sqrt{キ}}{ク}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$	ケ，4
コ，2	$\frac{\sqrt{サ}}{シ}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{ス}$，$\sqrt{2}$	セソ°，90°
タ，1	チ，4	ツテト°，180°	

〔２〕

〔２〕

$\log_2$ ナ$-$ニ， $\log_2 5-1$ $\quad$ $\frac{ヌ}{2}$， $\frac{9}{2}$

ネ，a $\quad$ ノ，3

ハ，a $\quad$ ヒ＜フ＜ヘ， b＜c＜a

第２問

アイ，－a $\quad$ $-a^{ウ}-$エa^2， $-a^3-3a^2$

$x^{オ}-$カx^2， x^3-3x^2 $\quad$ キ，0

クケ，－3 $\quad$ コサ，－2

x^2-シ$x+$ス， x^2-6x+9 $\quad$ x^2-セx， x^2-4x

$\frac{ソ}{2}$， $\frac{3}{2}$ $\quad$ タ，0

$\frac{チ}{2}$， $\frac{9}{2}$ $\quad$ ツ，③

$\frac{テト}{ナ}$， $\frac{27}{2}$

第３問

アy， －y $\quad$ イx， $2x$

ウ，0 $\quad$ (エオ，カ)， (－4，3)

$\frac{キ}{ク}(\overrightarrow{AB}-ケ\overrightarrow{AC})$， $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$ $\quad$ $\frac{コサ}{シ}$， $\frac{-4}{3}$

$\frac{ス}{セ}$， $\frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{ソ\sqrt{タチ}}{ツ}$， $\frac{2\sqrt{13}}{5}$

$\frac{\sqrt{テト}}{ナニ}$， $\frac{\sqrt{13}}{65}$

第４問

$\pm$アイ$^\circ$， $\pm 90^\circ$ $\quad$ ウ，1

$\frac{エオ+カi}{キ}$， $\frac{-1+3i}{2}$ $\quad$ $\frac{クケ-コi}{サ}$， $\frac{-1-3i}{2}$

$\frac{シ}{ス}\alpha^{セ}$， $\frac{3}{2}\alpha^2$ $\quad$ $\frac{ソ}{タ}\alpha^{チ}$， $\frac{5}{2}\alpha^3$

ツテ$p^{ト}=$ナニ$q^{ヌ}$， $50p^3=27q^2$， $\quad$ ネノα， -2α

第５問

$\frac{アイ}{243}$， $\frac{80}{243}$ $\quad$ $\frac{ウ}{エオ}$， $\frac{4}{27}$ $\quad$ $\frac{カキ}{クケ}$， $\frac{20}{27}$ $\quad$ $\frac{コ}{サシ}$， $\frac{8}{27}$

$\frac{ス}{セ}$， $\frac{5}{9}$ $\quad$ ソタチ，473 $\quad$ ツテm， $32m$ $\quad$ トナ，14

第６問

アイウ，130 $\quad$ エ，④ $\quad$ オカキ，102 $\quad$ クケコ，140

サ，③ $\quad$ シスセ，258 $\quad$ ソ，2