2004年度　本試験　数学II·B

第１問

〔１〕

〔１〕　不等式

$$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$$

を満たす x の値の範囲は $\boxed{ア}<x\leqq\boxed{イ}$ である。x がこの範囲にあるとき

$$y=4^x-6\cdot 2^x+10$$

の最大値と最小値を求めよう。

$X=2^x$ とおくと，X のとる値の範囲は $\boxed{ウ}<X\leqq\boxed{エ}$ であり

$$y=(X-\boxed{オ})^{\boxed{カ}}+\boxed{キ}$$

である。したがって，y は $x=\boxed{ク}$ のとき最大値 $\boxed{ケ}$ をとり，$x=\log_2\boxed{コ}$ のとき最小値 $\boxed{}$
$\boxed{サ}$ をとる。

〔２〕

〔２〕　a を $0^\circ<a<180^\circ$ を満たす角度とする。$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ の範囲で関数

$$f(\theta)=\sin(\theta-a)-\sin\theta$$

を考える。

(1)　方程式

$$f(\theta)=0$$

の解 θ は a を用いて

$$\theta=\boxed{シス}^\circ+\frac{a}{2}$$

と表される。さらに，この解 θ が $\sin(\theta-a)=\dfrac{1}{2}$ を満たすならば

$$a=\boxed{セソタ}^\circ$$

である。

(2)　a を(1)で求めた角度とするとき，関数 $f(\theta)$ は

$$\theta=\boxed{チツテ}^\circ \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$$

$$\theta=\boxed{ニヌ}^\circ \text{ のとき最小値 } -\sqrt{\boxed{ネ}}$$

をとる。

第２問

【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】【６】…選択問題（２題選択）

(1)　座標平面上の放物線 $y=x^2$ を C とする。a は $a\neq 1$ を満たす実数とし，C 上に点 $\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$ と点 $\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$ をとる。2 点 P，Q を通る直線を l とすると，l の方程式は

$$y=(\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}})x-\boxed{\text{ウ}}\,a^2-\boxed{\text{エ}}\,a$$

である。次に，b は $b\neq 1$，$b\neq a$ を満たす実数として，2 点

$\mathrm{R}(b+1,\ (b+1)^2)$，$\mathrm{S}(2b,\ 4b^2)$

を通る直線を m とする。直線 l，m の交点 T は

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1),\ \boxed{\text{キ}}\,ab+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1)\right)$$

である。よって，b を限りなく a に近づけるとき，点 T は限りなく点

$$\mathrm{U}\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \boxed{\text{サ}}\,a^2+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

に近づく。

(2)　(1) で求めた点 U は，a の値によらない放物線

$$D:y=\frac{\boxed{\text{シ}}\,x^2-\boxed{\text{ス}}\,x+\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

上にある。さらに，点 U における放物線 D の接線の傾きは $\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}$ である。放物線 D の接線で原点 O を通るものは

$y=x$　と　$y=\boxed{\text{ツテ}}\,x$

の二つである。

(3)　二つの放物線 C，D の共有点の座標は $(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}})$ である。放物線 C，D および y 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第３問

点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ 1,\ 0)$ に平行な直線を l とする。また，点 $\mathrm{B}(0,\ 5,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$ に平行な直線を m とする。l 上の点 P から m に下ろした垂線の足を P′ とする。また，m 上の点 Q から l に下ろした垂線の足を Q′ とする。$\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ となる P と Q を求めよう。

補足：「点 P から m に下ろした垂線の足」とは，点 P からひいた m の垂線と m との交点のことである。

(1)　実数 t，t'，s，s' により

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\,\vec{u},\quad \overrightarrow{\mathrm{BP'}}=t'\,\vec{v},\quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\,\vec{v},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ'}}=s'\,\vec{u}$$

と表される。直線 PP′ と直線 m が直交するから

$$t' = \boxed{\text{ア}} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} t$$

である。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$の成分を$t$を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = (\boxed{\text{エ}} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} t,\ \boxed{\text{キ}} - t,\ \boxed{\text{クケ}} + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} t)$$

である。同様に直線QQ′と直線lが直交するから

$$s' = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} s$$

である。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$の成分を$s$を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}} = (\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} s,\ \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} s,\ \boxed{\text{ナ}} - s)$$

である。

(2)　さて，$\mathrm{PP'}^2 + \mathrm{QP'}^2 = \mathrm{PQ}^2 = \mathrm{QQ'}^2 + \mathrm{PQ'}^2$であるから，$\mathrm{PP'} = \mathrm{QQ'}$であるための条件は$\mathrm{QP'} = \mathrm{PQ'}$である。$\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} = (s' - t)\,\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP'}} = (t' - s)\,\vec{\mathrm{v}}$であるから，$\mathrm{PQ'} = \mathrm{QP'}$となるのは

$s = \boxed{\text{ニ}} - t$ ………………………………… ①

または

$s = \boxed{\text{ヌネ}} + t$ ………………………………… ②

のときである。

(3)　①が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$が垂直になるのは$t = \boxed{\text{ノ}}$または$t = \boxed{\text{ハ}}$のときである。（$\boxed{\text{ノ}}$と$\boxed{\text{ハ}}$は解答の順序は問わない。）　②が成り立つときは，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$が垂直になるような実数$t$の値はない。

第４問

複素数$z = x + yi$（x，yは実数）は$y \neq 0$を満たし，かつ１，z，z^2，z^3は相異なるとする。またzに共役な複素数を$\bar{z} = x - yi$とする。

(1)　複素数平面において１，z，z^2，z^3の表す点をそれぞれA_0，A_1，A_2，A_3とする。線分$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$と線分$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$が両端以外で交わる条件を求めよう。線分$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$と線分$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$が両端以外の点Bで交わるとする。点Bを表す複素数をwとする。点Bが線分$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$を$a:(1-a)$に内分していれば

$$w = az + 1 - a$$

と表される。ここで$0 < a < 1$である。点Bが線分$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$を$b:(1-b)$に内分していれば

$$w = bz^3 + (1-b)z^2$$

と表される。ここで$0 < b < 1$である。ゆえに

$$bz^3 + (1-b)z^2 = az + 1 - a$$

すなわち

$$(z-\boxed{\text{ア}})(\boxed{\text{イ}}z^2+z+1-\boxed{\text{ウ}})=0$$

である。z は実数ではないから

$$z+\bar{z}=-\frac{1}{\boxed{\text{エ}}},\quad z\bar{z}=\frac{1-\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。これから a と b を，x と y を用いて表すと

$$a=\boxed{\text{キ}}+\frac{x^{\boxed{\text{ク}}}+y^{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}\,x},\quad b=-\frac{1}{\boxed{\text{サ}}\,x}$$

である。

したがって，$0<a<1$，$0<b<1$ より，線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わる条件は

$$x<\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\quad \text{かつ}\quad (x+\boxed{\text{ソ}})^2+y^2<\boxed{\text{タ}}$$

である。

(2)　z^4 の表す点を A_4 とする。z が(1)の条件を満たすとき，すなわち，線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わるとき，線分 A_3A_4 と線分 A_1A_2 は両端以外で $\boxed{\text{チ}}$。

$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪　必ず交わる

①　交わることはない

②　交わることも，交わらないこともある

第５問

二つのさいころ A と B があり，各面に 1，2，3，4，5，6 という目が書かれている。これらのさいころについて，A のさいころの各面には 1，3，4，5，6，8 の目のシールを貼（は）り，B のさいころの各面には 1，2，2，3，3，4 の目のシールを貼った。

はじめに硬貨を投げ，次に A と B のさいころを同時に投げる次の試行を行う。

●硬貨を投げて表が出れば，両方のさいころのシールをすべてはがして二つのさいころを同時に投げる。

●硬貨を投げて裏が出れば，両方ともシールをはがさずに二つのさいころを同時に投げる。

この試行について次の問いに答えよ。ただし，シールの有無にかかわらず，さいころの各面の出方は同様に確からしいとする。

(1)　二つのさいころの目の和が 3 の倍数になる場合は，硬貨を投げて表が出たとき $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，裏が出たとき $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りある。したがって，この試行において二つのさいころの目の和が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，目の和が 3 の倍数であるという条件のもとで，二つのさいころの目の差が 2 以下である条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2)　この試行における二つのさいころの目の和を表す確率変数を X とする。

硬貨を投げて表が出たとき，同時に投げた二つのさいころの目の和の平均（期待値）は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

硬貨を投げて裏が出たとき，二つのさいころの目の和の平均は $\boxed{\text{ス}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

したがって，この試行における X の平均 E(X) は $\boxed{\text{チ}}$，分散 V(X) は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

第６問

自然数 x，p および n を入力して x^p を n で割った余りを出力するプログラムを作成する。ただし，このプログラムを実行するコンピュータは 2^{63} 以上の数値を取り扱うことができないとする。

ここで，INT(X) は X をこえない最大の整数を表す関数である。また，必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてもよい。

〔プログラム 1〕

```
100  INPUT ” X,P,N” ; X,P,N
110  A・1
120  FOR K・1 TO [ ア ]
130      A・A・X
140  NEXT K
150  A・[ イ ]
160  PRINT A
170  END
```

(1)　〔プログラム 1〕の 120 行から 140 行の FOR～NEXT 文で x^p を求めている。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

⓪　P　　①　2・P　　②　P・P　　③　P・X
④　A　　⑤　N　　⑥　X

また，150 行で x^p を n で割った余りを求めている。$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　INT(A・N)　　①　INT(A・N)・N　　②　A・INT(A・N)
③　A・INT(A・N)　　④　A・INT(A・N)・N　　⑤　A・INT(A・N)・N

(2)　2^{63} は 10 進法で $\boxed{\text{ウエ}}$ 桁（けた）の数である。$x=4$ ならば $p \geqq \boxed{\text{オカ}}$ のとき，$x=8$ ならば $p \geqq \boxed{\text{キク}}$ のとき，おのおの $x^p \geqq 2^{63}$ であるので，〔プログラム 1〕による計算は，このコンピュータでは取り扱うことができない。ただし，$\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ にはそれぞれ条件に適する最小の自然数を答えよ。

(3) 〔プログラム 1〕について(2)で述べた x と p の大きさに関する制限を改善するため，次の性質を利用してプログラムを変更する。

「S，T を自然数とするとき，S，T を n で割った余りを s，t とする。このとき，$s<n$ かつ $t<n$ であり，積 ST を n で割った余りと積 st を n で割った余りは等しい。」

〔プログラム 2〕

```
100  INPUT ”X,P,N”; X,P,N
110  B・[ ケ ]
120  A・1
130  FOR K・1 TO [ ア ]
140      A・A・B
150      A・[ イ ]
160  NEXT K
170  PRINT A
180  END
```

〔プログラム 2〕の 110 行で x を n で割った余りを計算している。$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ INT(X・N)	① INT(X・N)・N	② X・INT(X・N)
③ X・INT(X・N)	④ X・INT(X・N)・N	⑤ X・INT(X・N)・N

〔プログラム 2〕を実行し，変数 X，P，N にそれぞれ 8，25，5 を入力する。このとき，110 行の B の値は $\boxed{\text{コ}}$ である。さらに，130 行から 160 行の FOR～NEXT 文の各ステップにおける 140 行の A・B の値のなかでの最大値は $\boxed{\text{サシ}}$ である。

130 行から 160 行までのループを 1 回処理するのに 10^{-8} 秒必要であり，その他の行の処理時間は無視できるものとする。$p=2^{62}$ のとき，〔プログラム 2〕を実行するのに必要な時間を s 秒とすると，$10^{\boxed{\text{スセ}}} \leqq s < 10^{\boxed{\text{スセ}}+1}$ である。

【解答１】

第１問 〔１〕

〔１〕

ア，1	イ，2	ウ，2	エ，4
$(X-\text{オ})^{\text{カ}}+\text{キ}$，$(X-3)^2+1$		ク，2	ケ，2
$\log_2\text{コ}$，$\log_2 3$	サ，1		

〔２〕

〔２〕

シス，90	セソタ，120	チツテ，180	$\dfrac{\sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ニヌ，60　　　$-\sqrt{ネ}$，$-\sqrt{3}$

第２問

アa＋イ，$3a+1$　　　$-$ウa^2-エa，$-2a^2-2a$

オ，カ，キ，2，3，2　　　ク，ケ，コ，サ，4，3，2，2

$\dfrac{シx^2-スx+セ}{ソ}$，$\dfrac{9x^2-4x+4}{8}$　　　タa＋チ，$3a+1$

ツテx，$-2x$　　　(ト，ナ)，(2，4)

$\dfrac{ニ}{ヌ}$，$\dfrac{1}{3}$

第３問

ア$+\dfrac{イ}{ウ}t$，$1+\dfrac{1}{2}t$　　　エ$+\dfrac{オ}{カ}t$，$1+\dfrac{1}{2}t$　　　キ$-t$，$5-t$

クケ$+\dfrac{コ}{サ}t$，$-1+\dfrac{1}{2}t$　　　$\dfrac{シ}{ス}-\dfrac{セ}{ソ}s$，$\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}s$　　　$\dfrac{タチ}{ツ}-\dfrac{テ}{ト}s$，$\dfrac{-5}{2}-\dfrac{1}{2}s$

ナ$-s$，$2-s$　　　ニ$-t$，$7-t$　　　ヌネ$+t$，$-1+t$

ノ，ハ，2，6 または 6，2

第４問

$z-$ア，$z-1$　　　イz^2+z+1-ウ，$\mathrm{b}z^2+z+1-\mathrm{a}$

$-\dfrac{1}{エ}$，$-\dfrac{1}{\mathrm{b}}$　　　$\dfrac{1-オ}{カ}$，$\dfrac{1-\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$　　　キ，1

$\dfrac{x^{ク}+y^{ケ}}{コx}$，$\dfrac{x^2+y^2}{2x}$　　　$-\dfrac{1}{サx}$，$-\dfrac{1}{2x}$　　　$\dfrac{シス}{セ}$，$\dfrac{-1}{2}$

$(x+ソ)^2+y^2<タ$，$(x+1)^2+y^2<1$　　　チ，0

第５問

アイ，12	ウエ，12	$\dfrac{オ}{カ}$，$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{キ}{ク}$，$\dfrac{5}{8}$	ケ，7
$\dfrac{コサ}{シ}$，$\dfrac{35}{6}$	ス，7	$\dfrac{セソ}{タ}$，$\dfrac{35}{6}$	チ，7	$\dfrac{ツテ}{ト}$，$\dfrac{35}{6}$

第６問

ア，0	イ，4	ウエ，19	オカ，32	キク，21
ケ，4	コ，3	サシ，12	スセ，10	