第１問　〔１〕

〔１〕

(1)　一般に A，B を定数とするとき，$x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して，x の１次不等式 $Ax+B>0$ が成り立つ条件は

$A \geqq$ $\boxed{ア}$　かつ　$B>$ $\boxed{イ}$

である。

(2)　$x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して，不等式

$(x+1)\sin^2\alpha+(2x-1)\sin\alpha\cos\alpha-x\cos^2\alpha>0$　･････････ ①

が成り立つような α の値の範囲を求めよう。ただし，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ とする。

$x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して，①が成り立つ条件は

$\sin\boxed{ウ}\alpha \geqq \cos\boxed{エ}\alpha$

かつ

$\sin^{\boxed{オ}}\alpha>\sin\alpha\cos\alpha$

が成り立つことである。これより，求める α の値の範囲は

$\boxed{カキ}^\circ<\alpha \leqq \dfrac{\boxed{クケコ}^\circ}{\boxed{サ}}$

である。

〔２〕

〔２〕　正の数 x に対して

$a=\log_3 x-\dfrac{7}{2}$，$b=\log_3 x-\dfrac{5}{2}$，$c=\log_9 x-\dfrac{5}{2}$，$d=\log_9 x-\dfrac{3}{2}$

とおく。

(1)　$d=0$ となるような x の値は $x=\boxed{シス}$ である。

(2)　$abcd>0$ となるような x の値の範囲を求めよう。a，b，c，d のすべてが負の場合には

$0<x<\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}$

となる。a，b，c，d のうち二つが正で残り二つが負の場合には

$\boxed{タチ}<x<\boxed{ツテ}\sqrt{\boxed{ト}}$

となる。さらに，a，b，c，d のすべてが正の場合には

$\boxed{ナニヌ}<x$

となる。

(3)　$\boxed{タチ}<x<\boxed{ツテ}\sqrt{\boxed{ト}}$ の範囲において，a，b，c，d の間には大小関係

$\boxed{ネ} < \boxed{ノ} < \boxed{ハ} < \boxed{ヒ}$

が成り立つ。

第２問

【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】【６】…選択問題（２題選択）

関数 $f(x)$ は

$x \leqq 3$ のとき $f(x) = x$

$x > 3$ のとき $f(x) = -3x + 12$

で与えられている。このとき，$x \geqq 0$ に対して，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

と定める。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$g(x) = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} x^{\boxed{ウ}}$$

であり，$x \geqq 3$ のとき

$$g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \boxed{エオ}\,x - \boxed{カキ}$$

である。

(2)　曲線 $y = g(x)$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(a\,,\ g(a))$（ただし，$0 < a < 3$）における C の接線 l の傾きは $\boxed{ク}$ であるから，l の方程式は

$$y = \boxed{ク}\,x - \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}a^2$$

である。

(3)　l と x 軸の交点を Q とすると Q の座標は

$$\left(\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}a\,,\ 0\right)$$

であり，l と C の P 以外の交点を R とすると R の座標は

$$\left(\boxed{ス} - a\,,\ \boxed{セ}\,a - \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}a^2\right)$$

である。

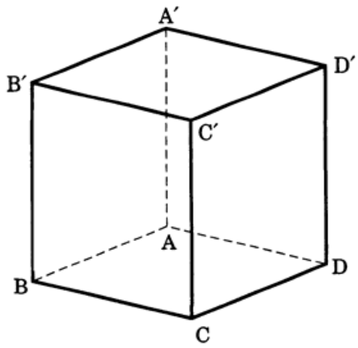
(4)　R から x 軸に垂線を引き，x 軸と交わる点を H とするとき，三角形 QRH の面積 S は

$$S=\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}a^3-\boxed{テ}a^2+\boxed{トナ}a$$

である。S は $a=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ のとき最大値をとる。

第３問

一辺の長さが１の，次の図のような立方体 ABCD—A′B′C′D′ において，AB，CC′，D′A′ を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{y}$，$\overrightarrow{AA'}=\vec{z}$ とおく。ただし，$0<a<1$ とする。



(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{PQ}=(\boxed{ア}-\boxed{イ})\vec{x}+\vec{y}+\boxed{ウ}\vec{z}$$
$$\overrightarrow{PR}=\boxed{エオ}\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$$

となる。したがって

$$|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|=1:\boxed{カ}$$
$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\boxed{キ}(a^2-a+\boxed{ク})$$
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=a^2-a+\boxed{ケ}$$

であるから，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角は $\boxed{コサ}^\circ$ である。

(2)　三角形 PQR の重心を G とすると

$$\overrightarrow{DG}=\frac{\boxed{シ}+\boxed{ス}}{\boxed{セ}}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$$

である。（$\boxed{シ}$ と $\boxed{ス}$ は解答の順序を問わない。）

いま，辺 C′D′ 上に SQ＝SR となるように点 S をとる。このとき，$\overrightarrow{C'S}=\boxed{ソ}\overrightarrow{C'D'}$ となり

$$\overrightarrow{SD}=(\boxed{タ}-\boxed{チ})\vec{x}-\vec{z}$$

である。

(3)　$\overrightarrow{SG}$ と $\overrightarrow{DG}$ が垂直であるとき，a の値は $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ であり，$\angle QSR = \boxed{トナニ}^\circ$ となる。

第４問

複素数平面上で

$$z_0 = (\sqrt{3}+i)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z_1 = \frac{4\{(1-\sin\theta)+i\cos\theta\}}{(1-\sin\theta)-i\cos\theta}$$

$$z_2 = -\frac{2}{z_1}$$

の表す点をそれぞれ P_0，P_1，P_2 とする。ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。また，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表すものとし，偏角は -180° 以上 180° 未満とする。

(1)　$|z_0| = \boxed{ア}$，$\arg z_0 = \boxed{イウ}^\circ + \theta$ である。

(2)　z_1 の分母と分子に $(1-\sin\theta)+i\cos\theta$ をかけて計算すると

$$z_1 = \boxed{エ}(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

となる。よって，$|z_1| = \boxed{オ}$，$\arg z_1 = \boxed{カキ}^\circ + \theta$ である。

(3)

$$\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \boxed{ク},\quad \arg\frac{z_1}{z_0} = \boxed{ケコ}^\circ$$

であるから，$P_0P_1 = \boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}$ である。

(4)　原点 O，P_0，P_1，P_2 の 4 点が同一円周上にある場合を考える。このとき $\angle OP_2P_1$ を考えると

$$\arg\frac{z_1 - z_2}{-z_2} = -\boxed{スセ}^\circ$$

であるから，

$$\boxed{ソ}\cos 2\theta - \boxed{タ} = 0$$

が成り立つ。よって

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$$

となる。

第５問

１から８までの整数のいずれか一つが書かれたカードが，各数に対して１枚ずつ合計８枚ある。D さんがカードを引いて，賞金を得るゲームをする。その規則は次のとおりである。

100 円のゲーム代を払って，カードを 1 枚引き，書いてある数が X のとき， $pX+q$ 円を受け取る。ここで， p ， q は正の整数とする。

(1)　確率変数 X の平均（期待値）は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　D さんがカードを 1 枚引いて受け取る金額からゲーム代を差し引いた金額を Y 円とする。確率変数 Y の平均を N とするとき， N を p と q を用いて表すと

$$N=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}p+q-\boxed{\text{クケコ}}$$

である。

(3)　$N=0$ を満たす p ， q の値の組の総数は $\boxed{\text{サシ}}$ である。その中で， p の最小値は $\boxed{\text{ス}}$ ，最大値は $\boxed{\text{セソ}}$ である。

(4)　Y の分散は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p^2$ である。したがって，$N=0$ のとき Y の分散の最小値 C は，$p=\boxed{\text{テ}}$ のとき起こり， $C=\boxed{\text{トナ}}$ である。

第６問

座標平面上に三つの点 P$(2,0)$，Q$(9,7)$，R$(8,a)$ がある。点 S(x,y) の座標と a を入力し，P，Q，R のうちで，S に最も近い点とその点までの距離の 2 乗を出力するプログラムを以下のように作った。ただし， x， y， a は整数を入力するものとする。

プログラム 1

```
100  INPUT ”x,y・”;X,Y
110  INPUT ”a・”;A
120  P・(X・2)・(X・2)・Y・Y
130  Q・(X・9)・(X・9)・(Y・7)・(Y・7)
140  R・(X・8)・(X・8)・(Y・A)・(Y・A)
150  D・P
160  E・Q
170  F・R
180  IF D・E THEN  ア
190  IF E・F THEN  イ
200  PRINT ”距離の 2 乗は”; ウ
210  PRINT ”その点は”
220  IF  ウ  ・P THEN PRINT ”点 P”
```

```
230  IF [ ウ ] ・Q THEN PRINT ” 点Q”
240  IF [ ウ ] ・R THEN PRINT ” 点R”
250  END
```

(1)　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$は，それぞれ「D と E の値を入れかえる」と「E と F の値を入れかえる」ということを意味する。それぞれに当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

⓪　G・D:D・E:E・G　　①　D・E:G・D:E・G　　②　G・D:E・G:D・E
③　G・E:E・F:F・G　　④　E・F:G・E:F・G　　⑤　G・E:F・G:E・F

(2)　$\boxed{\text{ウ}}$に入る文字を，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

⓪　P　　①　Q　　②　R　　③　D
④　E　　⑤　F　　⑥　G

(3)　プログラム 1 を実行して x,y・?に対し 5，4 を入力した。そのあと a を入力して，3 点 P，Q，R すべてが出力されるためには a として$\boxed{\text{エ}}$または$\boxed{\text{オ}}$を入力しなければならない。

(4)　プログラム 1 と同じ出力を得るために 150～190 行を次の 4 行で置きかえた。

```
150  M・P
160  IF Q・M THEN [ カ ]
170  IF R・M THEN [ キ ]
180  [ ウ ]・M
```

プログラム中の$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。

⓪　Q・M　　①　M・Q　　②　M・R　　③　R・M

(5)　プログラム 1 を変更して，距離の 2 乗の最大値とその点を出力するプログラムにするには，$\boxed{\text{ク}}$だけでよい。$\boxed{\text{ク}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　180 行目と 190 行目を入れかえる
①　$\boxed{\text{ウ}}$の文字のみを変更する
②　180，190 行の IF 文の中の不等式をそれぞれ D・E，E・F に変更する
③　180，190 行の IF 文の中の不等式をそれぞれ D・E，E・F に変更し，さらに，180 行目と 190 行目を入れかえる

(6)　プログラム 1 を変更して，最小値と最大値の両方を出力するようにするために，まず 180 行と 190 行の前後にそれぞれ 1 行追加し，

```
175  FOR K・1 TO [ ケ ]
180  IF D・E THEN [ ア ]
190  IF E・F THEN [ イ ]
195  NEXT K
```

とする。これで，最小値は$\boxed{\text{コ}}$に，最大値は$\boxed{\text{サ}}$に代入されることになる。あとは点を出力する 200 行以降の部分を修正するだけでよい。

$\boxed{\text{ケ}}$には，180 行と 190 行を繰り返す回数のうちで，題意に適する最小のものを答えよ。また，

$\boxed{コ}$，$\boxed{サ}$に当てはまるものを，(2)の選択肢⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。

【解答１】第１問　〔１〕

〔１〕

ア，0　　イ，0　　ウ，2　　エ，2

オ，2　　カキ，45　　$\dfrac{クケコ}{サ}$，$\dfrac{225}{2}$

〔２〕

〔２〕

シス，27　　セ$\sqrt{ソ}$，$9\sqrt{3}$　　タチ，27

ツテ$\sqrt{ト}$，$27\sqrt{3}$　　ナニヌ，243　　ネ，c

ノ，a　　ハ，d　　ヒ，b

第２問

$\dfrac{ア}{イ}x^{ウ}$，$\dfrac{1}{2}x^2$　　エオx，$12x$　　カキ，18　　ク，a

$\dfrac{ケ}{コ}a^2$，$\dfrac{1}{2}a^2$　　$\dfrac{サ}{シ}a$，$\dfrac{1}{2}a$　　ス$-a$，$6-a$　　セ$a-\dfrac{ソ}{タ}a^2$，$6a-\dfrac{3}{2}a^2$

$\dfrac{チ}{ツ}a^3-テa^2+トナa$，$\dfrac{9}{8}a^3-9a^2+18a$　　$\dfrac{ニ}{ヌ}$，$\dfrac{4}{3}$

第３問

ア－イ，1－a ＊　　ウ，a＊　　エオ，－a

カ，1　　キ$(a^2-a+ク)$，$2(a^2-a+1)$

ケ，1　　コサ，60　　$\dfrac{シ+ス}{セ}$，$\dfrac{a+1}{3}$または$\dfrac{1+a}{3}$

ソ，a　　タ－チ，a－1　　$\dfrac{ツ}{テ}$，$\dfrac{1}{2}$

トナニ，120

＊は，両方正解の場合のみ点を与える。

第４問

ア，2　　イウ，30　　エ，4　　オ，4

カキ，90　　ク，2　　ケコ，60　　サ$\sqrt{シ}$，$2\sqrt{3}$

スセ，90　　ソ$\cos 2\theta$－タ，$8\cos 2\theta-1$　　$\dfrac{\sqrt{チ}}{ツ}$，$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

第５問

$\dfrac{ア}{イ}$，$\dfrac{9}{2}$　　$\dfrac{ウエ}{オ}$，$\dfrac{21}{4}$　　$\dfrac{カ}{キ}p+q-クケコ$，$\dfrac{9}{2}p+q-100$

サシ，11　　ス，2　　セソ，22　　$\dfrac{タチ}{ツ}$，$\dfrac{21}{4}$

テ，2　　　トナ，21

第６問

ア，0　　　イ，3　　　ウ，5　　　エ，オ，0, 8 または 8, 0

カ，1　　　キ，2　　　ク，2　　　ケ，2　　　コ，5

サ，3