2002年度　本試験　数学II・B

第１問　〔１〕

〔１〕　aを正の定数とし，角θの関数

$$f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)$$

を考える。

(1)　$f(\theta)=\boxed{\text{ア}}\sin(a\theta+\boxed{\text{イウ}}^\circ)$である。

(2)　$f(\theta)=0$を満たす正の角θのうち

最小のものは

$$\frac{\boxed{\text{エオカ}}^\circ}{a}$$

であり，小さい方から数えて４番目と５番目のものは，それぞれ

$$\frac{\boxed{\text{キクケ}}^\circ}{a},\quad \frac{\boxed{\text{コサシ}}^\circ}{a}$$

である。

(3)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$の範囲で，$f(\theta)=0$を満たす$\theta$がちょうど４個存在するような$a$の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \leqq a < \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

〔２〕

〔２〕　対数関数

$$f(x)=\log_2 x$$
$$g(x)=\log_2(x+a)$$

について考える。関数$y=g(x)$のグラフは，関数$y=f(x)$のグラフをx軸方向に$\boxed{\text{テト}}$だけ平行移動したものである。ただし，$a>0$とする。

(1)　$F(x)=g(x)-f(x)$とする。

$F(2)=1$となるのは，$a=\boxed{\text{ナ}}$のときである。

$F(1)=2F(3)$となるのは，$a=\boxed{\text{ニ}}$のときである。

(2)　次に

$$h(x)=\log_4(4x+b)\qquad (b>0)$$

とする。$g(1)=h(1)$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{1}{2}\right)$となるのは

$$a=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}},\quad b=\frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$$

のときである。

第２問

【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】【６】…選択問題（２題選択）

座標平面において，点 $(a,\ 1)$ を中心とし，x 軸に接する円を C_1 とする。また，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ を C_2 とし，C_2 上に点 $\mathrm{P}(b,\ \frac{1}{2}b^2)$ をとる。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)　C_1 の方程式は

$$(x-\boxed{\text{ア}})^2+(y-\boxed{\text{イ}})^2=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2)　P における C_2 の接線 l の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ である。したがって，l の方程式は

$$y=\boxed{\text{エ}}\,x-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}b^{\boxed{\text{キ}}}$$

である。また，P を通り，l に直交する直線 m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}b^{\boxed{\text{ス}}}+\boxed{\text{セ}}$$

である。

(3)　C_1 の中心が m 上にあるとする。このとき

$$a=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}b^{\boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つ。

さらに，C_1 が P を通るとき

$$b=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}},\quad a=\frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{2}$$

である。

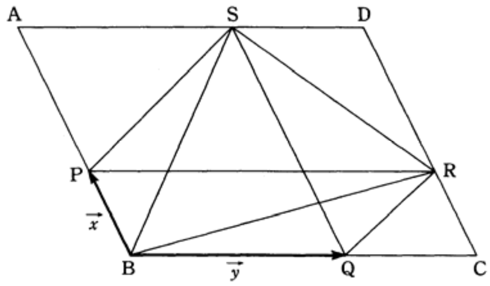
このとき，C_1 は P において l に接し，l と x 軸のなす角は $\boxed{\text{ナニ}}^\circ$ である。また，2 直線 $x=0$，$x=a$ の間にあって，C_1 と C_2 と x 軸の三つで囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}-\frac{\pi}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

第３問

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $a:1$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1$ に内分する点を Q とする。辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ $\mathrm{PR}\,/\!/\,\mathrm{BC}$, $\mathrm{SQ}\,/\!/\,\mathrm{AB}$ となるようにとり，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\vec{y}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とおく。



(1)　五角形 PBQRS の辺 RQ，SP および対角線 SB，RB が表すベクトルは $\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-\vec{x}-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{y},\qquad \overrightarrow{\mathrm{SP}}=\boxed{\text{ウエ}}\,\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SB}}=-(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}})\,\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=-\vec{x}-\left(\boxed{\text{キ}}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)\vec{y}$$

となる。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が成り立つとする。このとき

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}|\vec{x}|^2=-\frac{1}{\boxed{\text{シス}}}|\vec{y}|^2$$

である。

(3)　$\mathrm{RQ}\,/\!/\,\mathrm{SB}$ および $\mathrm{SP}\,/\!/\,\mathrm{RB}$ が成り立つとする。このとき

$$a=\frac{\boxed{\text{セソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\qquad b=\frac{\boxed{\text{ツ}}+\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

(4)　(2) と (3) の条件が同時に成り立つとき

$$\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}=\boxed{\text{ナ}}$$

であるから

$$\cos\angle \mathrm{PBQ} = \frac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

を得る。

第４問

(1)　相異なる二つの複素数 a, b に対して

$$\arg\frac{z-a}{z-b} = \pm 90^\circ$$

を満たす z は，複素数平面上の，ある円の周上にある。この円は a, b を用いて

$$\left| z - \frac{\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \right| = \frac{\left| \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} \right|}{\boxed{\text{カ}}}$$

で表される。

ただし，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表す。

(2)　以下，複素数の偏角は 0°以上 360°未満とする。

2 次方程式 $x^2 - 2x + 4 = 0$ の二つの解を α, β とする。ただし，α の虚部は正とする。このとき

$$\arg\alpha = \boxed{\text{キク}}^\circ,\quad \arg\beta = \boxed{\text{ケコサ}}^\circ$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{シス}},\quad \alpha^2 - \beta^2 = \boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\, i$$

である。したがって

$$\arg\frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2} = 90^\circ$$

を満たす z が描く図形は

$$\left| z + \boxed{\text{タ}} \right| = \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

で表される円のうち

$$\boxed{\text{テトナ}}^\circ < \arg z < \boxed{\text{ニヌネ}}^\circ$$

を満たす部分である。

第５問

次の表はあるクラスの英語と数学の成績の分布である。生徒数は 50 人で，成績は 1 から 5 までの 5 段階評価である。たとえば，この表によると英語の成績が 4，数学の成績が 2 の生徒の数は 5 人である。

このクラス全員の名札 50 枚をよくまぜて，1 枚を取り出し，その名札の生徒の英語の成績を X, 数学の成績を Y として確率変数 X, Y を定める。

ただし，同姓同名の生徒はいないものとする。

	Y	数		学		
X		5	4	3	2	1
英	5	1	3	1	0	1
	4	1	0	7	5	1
	3	2	1	0	9	3
語	2	1	b	6	0	a
	1	0	0	1	1	3

(1)　$X=4$となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。

$X=4$かつ$Y=3$となる確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。

$X\geqq 3$となる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。

$X\geqq 3$という条件のもとで$Y=3$となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ である。

(2)　$a+b=\boxed{ス}$であり，$X=2$となる確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ で

Xの平均（期待値）は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

(3)　Yの平均が$\dfrac{133}{50}$であれば

$a=\boxed{ト}$，$b=\boxed{ナ}$

である。

(4)　$X=2$という事象と$Y=4$という事象が独立であれば

$a=\boxed{ニ}$，$b=\boxed{ヌ}$

であり，Yの平均は $\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}}$ である。

第６問

pを３以上の自然数とする。１以上$p-1$以下の各自然数aに対して，数の列

a_1，a_2，…，a_{p-1}

を次のように決める。

● a_1はaとする。

● a_{i+1} は $a_i \times a$ を p で割った余りとする。ただし，$1 \leqq i \leqq p-2$ である。

また，各 a に対して $f(a)$ を次のように決める。

● $a_i = 1$ となる i が $1 \leqq i \leqq p-1$ の範囲にあるときは，そのような最小の i を $f(a)$ とする。

● $a_i = 1$ となる i が $1 \leqq i \leqq p-1$ の範囲に無いときには $f(a) = 0$ とする。

p の値を入力して $f(1)$，$f(2)$，…，$f(p-1)$ を出力させるプログラムを考えたい。

方針　数の列 a_1，a_2，… を前の規則によって決めていく過程で $\boxed{\text{ア}}$ になればその i を出力してFORループを抜け出す。1から $p-1$ のどの i に対しても $\boxed{\text{イ}}$ ならば0を出力する。

この方針に従って，次のプログラムを書いた。

```
100  INPUT ”P・”;P
110  FOR A ・ 1 TO P・1
120    [ ウ ]
130    FOR I ・ 1 TO P・1
140      IF [ エ ] THEN PRINT ”f(”;A;”)・ ”;I:GOTO 180
150      B ・ A・B・P・INT(A・B/P)
160    NEXT I
170    PRINT ”f(”;A;”)・ 0”
180  NEXT A
190  END
```

注意：　INT(X)は，X を越えない最大の整数を表す関数である。

(1)　前の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に適するものを，次の①～⑦のうちから一つずつ選べ。

①　$a_i \neq 1$　②　$a_i = 1$　③　B ・ 0　④　B ・ 1

⑤　B ・・・ 0　⑥　B ・ A　⑦　A ・ B

(2)　このプログラムを実行する。表示

P・?

に対して7を入力したとき，はじめの4行は

f(1) ・ $\boxed{\text{オ}}$

f(2) ・ $\boxed{\text{カ}}$

f(3) ・ $\boxed{\text{キ}}$

f(4) ・ $\boxed{\text{ク}}$

と出力される。

(3)　前のプログラムで140行と150行を入れかえたプログラムを実行させ

P・?

に対して9を入力すると，はじめの4行は

f(1) ・ $\boxed{\text{ケ}}$

f（２）・ $\boxed{\text{コ}}$
f（３）・ $\boxed{\text{サ}}$
f（４）・ $\boxed{\text{シ}}$

となり，意図した結果とは異なるものが出力される。

【解答１】第１問　〔１〕

〔１〕

$\text{ア}\sin(a\theta+\text{イウ}^\circ)$，$2\sin(a\theta+60^\circ)$

$\dfrac{\text{エオカ}^\circ}{a}$，$\dfrac{120^\circ}{a}$

$\dfrac{\text{キクケ}^\circ}{a}$，$\dfrac{660^\circ}{a}$

$\dfrac{\text{コサシ}^\circ}{a}$，$\dfrac{840^\circ}{a}$

$\dfrac{\text{スセ}}{\text{ソ}}$，$\dfrac{11}{3}$

$\dfrac{\text{タチ}}{\text{ツ}}$，$\dfrac{14}{3}$

〔２〕

〔２〕

テト，ーa　　ナ，2　　ニ，3　　$\dfrac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$，$\dfrac{5}{4}$　　$\dfrac{\text{ノハ}}{\text{ヒフ}}$，$\dfrac{17}{16}$

第２問

$(x-\text{ア})^2+(y-\text{イ})^2$，$(x-\mathrm{a})^2+(y-1)^2$

ウ，1

エ，b

$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}b^{\text{キ}}$，$\dfrac{1}{2}b^2$

$\dfrac{\text{クケ}}{\text{コ}}x$，$\dfrac{-1}{\mathrm{b}}x$

$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}b^{\text{ス}}+\text{セ}$，$\dfrac{1}{2}b^2+1$

$\dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}b^{\text{チ}}$，$\dfrac{1}{2}b^3$

$\sqrt{\text{ツ}}$，$\sqrt{3}$

$\dfrac{\text{テ}\sqrt{\text{ト}}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

ナニ，60

$\dfrac{\text{ヌ}\sqrt{\text{ネ}}}{\text{ノ}}$，$\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

$\dfrac{\pi}{\text{ハ}}$，$\dfrac{\pi}{3}$

第３問

$-\vec{x}-\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}\vec{y}$，$-\vec{x}-\dfrac{1}{\mathrm{b}}\vec{y}$

$\text{ウエ}\,\vec{x}-\vec{y}$，$-\mathrm{a}\,\vec{x}-\vec{y}$

$-(\text{オ}+\text{カ})\,\vec{x}-\vec{y}$，$-(1+\mathrm{a})\,\vec{x}-\vec{y}$　または　$-(\mathrm{a}+1)\,\vec{x}-\vec{y}$

$-\vec{x}-\left(\text{キ}+\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}\right)\vec{y}$，$-\vec{x}-\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{b}}\right)\vec{y}$

$-\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}|\vec{x}|^2$，$-\dfrac{\mathrm{a}}{2}|\vec{x}|^2$

$-\dfrac{1}{\text{シス}}|\vec{y}|^2$，$-\dfrac{1}{2\mathrm{b}}|\vec{y}|^2$

$\dfrac{\text{セソ}+\sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}}$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\dfrac{\text{ツ}+\sqrt{\text{テ}}}{\text{ト}}$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ナ，1

$\dfrac{\text{ニ}-\sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}$，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

第４問

$\frac{ア+イ}{ウ}$, $\frac{a+b}{2}$ または $\frac{b+a}{2}$ $\frac{|エ-オ|}{カ}$, $\frac{|a-b|}{2}$ または $\frac{|b-a|}{2}$

キク, 60 ケコサ, 300 シス, -4 セ$\sqrt{ソ}i$, $4\sqrt{3}i$

$z+$タ, $z+2$ チ$\sqrt{ツ}$, $2\sqrt{3}$ テトナ, 120 ニヌネ, 240

第５問

$\frac{ア}{イウ}$, $\frac{7}{25}$ $\frac{エ}{オカ}$, $\frac{7}{50}$ $\frac{キ}{クケ}$, $\frac{7}{10}$ $\frac{コ}{サシ}$, $\frac{8}{35}$

ス, 3 $\frac{セ}{ソ}$, $\frac{1}{5}$ $\frac{タチ}{ツテ}$, $\frac{78}{25}$ ト, ナ, 1, 2

ニ, ヌ, 2, 1 $\frac{ネノ}{ハ}$, $\frac{13}{5}$

第６問

ア, 2 イ, 1 ウ, 6 エ, 4 オ, 1

カ, 3 キ, 6 ク, 3 ケ, 1 コ, 5

サ, 0 シ, 2