2002年度　本試験　数学Ⅰ･A

第１問

〔１〕

〔１〕　aを定数とし，2次関数

$$y=-4x^2+4(a-1)x-a^2$$

のグラフをCとする。

(1)　Cが点(1，-4)を通るとき，$a=\boxed{\text{ア}}$である。

(2)　Cの頂点の座標は

$$\left(\frac{a-1}{\boxed{\text{イ}}},\ \boxed{\text{ウエ}}a+\boxed{\text{オ}}\right)$$

である。

(3)　$a>1$とする。xが$-1\leqq x\leqq 1$の範囲にあるとき，この2次関数の最大値，最小値を調べる。最大値は

$1<a\leqq\boxed{\text{カ}}$　ならば　$-2a+\boxed{\text{キ}}$

$a>\boxed{\text{カ}}$　ならば　$-a^2+4a-\boxed{\text{ク}}$

である。また，最小値は

$$-a^2-\boxed{\text{ケ}}a$$

である。最大値と最小値の差が12になるのは

$$a=-1+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

のときである。

〔２〕

〔２〕　二つの箱A，Bがある。

Aの箱には，次のように6枚のカードが入っている。

0の数字が書かれたカードが1枚

1の数字が書かれたカードが2枚

2の数字が書かれたカードが3枚

Bの箱には，次のように7枚のカードが入っている。

0の数字が書かれたカードが4枚

1の数字が書かれたカードが1枚

2の数字が書かれたカードが2枚

Aの箱から1枚，Bの箱から2枚，あわせて3枚のカードを取り出す。

(1)　3枚のカードに書かれた数がすべて0である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(2)　3枚のカードに書かれた数の積が4である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3)　3枚のカードに書かれた数の積が0である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(4)　3枚のカードに書かれた数の積の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

第2問　〔1〕

〔1〕　a, bを実数とし，xの整式A, Bを

$$A = x^2 + ax + b,\quad B = x^2 + x + 1$$

とする。ただし，AとBは等しくないものとする。

(1)　等式

$$A^2 + B^2 = 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 + cx + d$$

が成り立つとき，$a = \boxed{\text{ア}}$, $b = -\boxed{\text{イ}}$, $c = -\boxed{\text{ウ}}$, $d = \boxed{\text{エ}}$である。

(2)　等式

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B) \\ &= \{(a-1)x + (b-1)\}\{\boxed{\text{オ}}x^2 + (a + \boxed{\text{カ}})x + b + 1\} \end{aligned}$$

を考える。$A - B$が$x - 1$で割り切れるのは$\boxed{\text{キ}}$のときであり，また，$A + B$が$x - 1$で割り切れるのは$\boxed{\text{ク}}$のときである。よって$A - B$と$A + B$が同時に$x - 1$で割り切れることはない。ただし，$\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$については，次の⓪～④の中から当てはまるものをそれぞれ一つずつ選べ。

⓪　$a + b = 0$　　①　$a - b = 0$　　②　$a + b - 2 = 0$

③　$a + b + 4 = 0$　　④　$a - b - 2 = 0$

したがって，$A^2 - B^2$が$(x-1)^2$で割り切れるのは，$A + B$が$(x-1)^2$で割り切れる場合である。このとき

$$a = -\boxed{\text{ケ}},\quad b = \boxed{\text{コ}},\quad A^2 - B^2 = \boxed{\text{サシス}}\,x(x-1)^2$$

となる。

〔2〕

〔２〕　半径 R の円に内接する四角形 ABCD が

$$\mathrm{AB}=\sqrt{3}-1,\quad \mathrm{BC}=\sqrt{3}+1,\quad \cos\angle\mathrm{ABC}=-\frac{1}{4}$$

を満たしており，△ACD の面積は△ABC の面積の 3 倍であるとする。

このとき，

$$\mathrm{AC}=\boxed{\text{セ}},\quad R=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

また，△ACD と△ABC の面積についての条件から，

$$\mathrm{AD}\times\mathrm{CD}=\boxed{\text{テ}}$$

$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2=\boxed{\text{トナ}}$$

となる。したがって，四角形 ABCD の周の長さは

$$\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}+2\sqrt{3}$$

である。

第３問

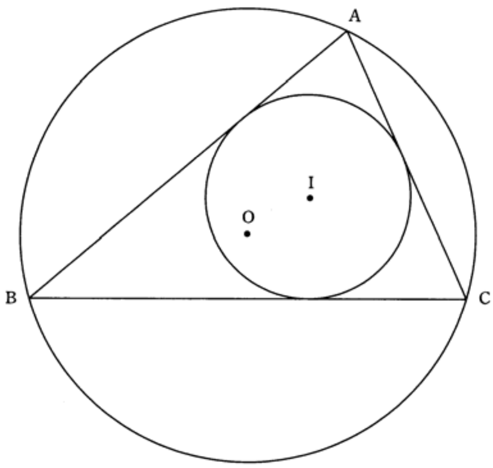
【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】…選択問題（１題選択）

(1)　初項が 0 でない等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2=0$ を満たしている。このとき，公比は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。$a_1+a_2+a_3=\dfrac{9}{4}$ ならば，$a_4+a_5+a_6=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\Lambda+\dfrac{1}{a_n}=57$ となるのは $n=\boxed{\text{ク}}$ のときである。

(2)　$b_n=pn+q$ で表される数列 $\{b_n\}$ に対して，初項から第 n 項までの和を S_n とする。$b_7=1$，$S_{12}=10$ ならば，$p=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$q=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，$S_1+S_2+\Lambda+S_{12}=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

第４問

三角形 ABC の外心を O，内心を I，また，外接円の半径を R，内接円の半径を r とする。O と I が一致しない場合に R，r と OI の関係を調べよう。次のア～サには A～G の中から C 以外の当てはまる文字を選べ。ただし，エとオは解答の順序を問わない。



AI の延長と外接円の交点を D とし，DO の延長と外接円の交点を E とする。また直線 OI と外接円の交点を F，G とし F，O，I，G がこの順に並ぶものとする。I から AC へ垂線をひき，交点を H とする。

△AHI と△EBD は，

$\angle \mathrm{HAI} = \angle \boxed{\text{アイ}}\mathrm{I} = \angle \mathrm{BED}$

$\angle \mathrm{AHI} = \angle \mathrm{EBD} = 90^\circ$

であるから相似で，ED : $\boxed{\text{ウ}}\mathrm{I} = \boxed{\text{エオ}}$: HI が成り立ち

$\boxed{\text{ウ}}\mathrm{I} \cdot \boxed{\text{エオ}} = 2rR$ ‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥ (1)

次に△DBI において

$\angle \mathrm{DIB} = \angle \mathrm{I}\boxed{\text{カキ}} + \angle \mathrm{IBA}$

$\angle \mathrm{DBI} = \angle \mathrm{DBC} + \angle \mathrm{IBC}$

$\angle \mathrm{IBA} = \angle \mathrm{IBC}$

$\angle \mathrm{I}\boxed{\text{カキ}} = \angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{DBC}$

であるから，$\angle \mathrm{DIB} = \angle \boxed{\text{クケ}}\mathrm{I}$ で，△DBI は二等辺三角形となり

$\boxed{\text{エオ}} = \mathrm{ID}$ ‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥ (2)

△IFD と△IAG において

$\angle \mathrm{IFD} = \angle \mathrm{GFD} = \angle \mathrm{IAG}$

$\angle \mathrm{FID} = \angle \mathrm{AIG}$

したがって，△IFD と△IAG は相似であり

$\mathrm{AI} \cdot \boxed{\text{コ}}\mathrm{I} = \boxed{\text{サ}}\mathrm{I} \cdot \mathrm{GI}$

$= (\boxed{\text{サ}}\mathrm{O} + \mathrm{OI})(\mathrm{GO} - \mathrm{OI})$

$= R^2 - \mathrm{OI}^2$ ‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥ (3)

(1)，(2)，(3) から

$\mathrm{OI}^2 = R^2 - \boxed{\text{シ}}$

が成り立つ。ただし，$\boxed{\text{シ}}$ には次の⓪～⑤の中から正しいものを一つ選べ。

⓪ r	① R	② r^2
③ rR	④ $2rR$	⑤ $4rR$

第５問

次のプログラムは$x=0,\ 1,\ \Lambda\ \Lambda\ ,\ 9$に対する$ax^2+bx+c$の値の最小値と最大値を求めるものである。$\boxed{\text{アイウ}}$, $\boxed{\text{エオカ}}$に適当な行番号を入れてプログラムを完成せよ。

```
100  INPUT ”a・”;A
110  INPUT ”b・”;B
120  INPUT ”c・”;C
130  U・C
140  V・C
150  FOR X・0 TO 9
160      Y・A・X・X+B・X+C
170      IF Y・・U THEN GOTO [アイウ]
180      U・Y
190      IF Y・・V THEN GOTO [エオカ]
200      V・Y
210  NEXT X
220  PRINT ”最小値・”;U
230  PRINT ”最大値・”;V
240  END
```

(1)　このプログラムを実行して，a・?に対して-1，b・?に対して 7，c・?に対して 28 を入力すると，180 行は$\boxed{\text{キ}}$回，200 行は$\boxed{\text{ク}}$回実行され

最小値　・　$\boxed{\text{ケコ}}$

最大値　・　$\boxed{\text{サシ}}$

が表示される。また，170 行の不等号・・を・に，190 行の不等号・・を・に変更したのち，同じデータを入力すると，180 行は$\boxed{\text{ス}}$回，200 行は$\boxed{\text{セ}}$回実行され

最小値　・　$\boxed{\text{ソタ}}$

最大値　・　$\boxed{\text{チツ}}$

が表示される。

(2)　冒頭のプログラムの 170 行と 180 行は，180 行を削除して 170 行を

170　$\boxed{\text{テ}}$

と書き直しても同じ結果を得る。同様に 190 行と 200 行も，200 行を削除して，190 行を

190　$\boxed{\text{ト}}$

と書き直すことができる。ただし，$\boxed{\text{テ}}$と$\boxed{\text{ト}}$については，次の⓪～⑤の中から最もふさわしいものを一つずつ選べ。

⓪　IF Y・U THEN U・Y	①　IF Y・U THEN U・Y
②　IF Y・U THEN U・Y	③　IF Y・V THEN V・Y
④　IF Y・V THEN V・Y	⑤　IF Y・V THEN V・Y

【解答１】 第１問　〔１〕

〔１〕

ア，2	$\frac{a-1}{\text{イ}}$, $\frac{a-1}{2}$	ウエa＋オ，$-2a+1$
カ，3	キ，1	ク，8
$-a^2-$ケa，$-a^2-4a$	$-1+$コ$\sqrt{\text{サ}}$，$-1+2\sqrt{3}$	

〔２〕

〔２〕

$\frac{\text{シ}}{\text{スセ}}$, $\frac{1}{21}$	$\frac{\text{ソ}}{\text{タチ}}$, $\frac{4}{63}$	$\frac{\text{ツテ}}{\text{トナ}}$, $\frac{37}{42}$	$\frac{\text{ニヌ}}{\text{ネノ}}$, $\frac{32}{63}$

第２問　〔１〕

〔１〕

ア，2	−イ，−2	−ウ，−6	エ，5

オ$x^2+(a+$カ$)x+b+1$，$2x^2+(a+1)x+b+1$

キ，2	ク，3	−ケ，−5	コ，1

サシス$x(x-1)^2$，$-12x(x-1)^2$

〔２〕

〔２〕

セ，3	$\frac{\text{ソ}\sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツ}}$, $\frac{2\sqrt{15}}{5}$	テ，6
トナ，12	ニ$\sqrt{\text{ヌ}}+2\sqrt{3}$，$2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$	

第３問

$\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$, $\frac{-1}{2}$	$\frac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$, $\frac{-9}{32}$	ク，9
$\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$, $\frac{1}{3}$	$\frac{\text{サシ}}{\text{ス}}$, $\frac{-4}{3}$	$\frac{\text{セソ}}{\text{タ}}$, $\frac{52}{3}$

第４問

アイI，BAI

ED：ウI＝エオ：HI，ED：AI＝BD：HI　または　ED：AI＝DB：HI

Iカキ，IAB	クケI，DBI
AI・コI＝サI・GI，AI・DI＝FI・GI	シ，4

第５問

アイウ，190	エオカ，210	キ，2	ク，3
ケコ，10	サシ，40	ス，4	セ，5
ソタ，10	チツ，40	テ，1	ト，3