2001年度　本試験　数学II·B

第１問　〔１〕

〔１〕

(1)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\boxed{ア}}{\sin\boxed{イ}\,\theta}$$

$$\tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\boxed{ウエ}\cos\boxed{オ}\,\theta}{\sin\boxed{カ}\,\theta}$$

であり，これらを用いて $\tan 15^\circ$ を求めると

$$\tan 15^\circ = \boxed{キ} - \sqrt{\boxed{ク}}$$

である。

(2)　θ が $15^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$ の範囲を動くとき，$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$ は

$\theta = \boxed{ケコ}^\circ$ のとき最小値 $\boxed{サ}$

$\theta = \boxed{シス}^\circ$ のとき最大値 $\boxed{セ}$

をとる。

〔２〕

〔２〕　方程式

$$\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^x} + \frac{5}{2^x} = 1$$

の解 x を求めよう。

$$X = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とおくと，X の方程式

$$\boxed{ソ}X^2 + \boxed{タ}X - 1 = 0$$

が得られる。

一方，①より $X > \boxed{チ}$ である。したがって

$$X = \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$$

を得る。これから，求める x は

$$x = \boxed{ト}\log_2\boxed{ナ}$$

となる。

第２問　〔１〕

〔１〕　座標平面において放物線 $y=x^2$ を C とする。第１象限の点 P$(a,\ a^2)$ における C の接線 l と y 軸との交点 Q の座標は

$$\left(0,\ \boxed{\text{ア}}\,a^{\boxed{\text{イ}}}\right)$$

である。l と y 軸のなす角が 30° となるのは

$$a=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

のときである。このとき線分 PQ の長さは $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であり，Q を中心とし線分 PQ を半径とする円と放物線 C とで囲まれてできる二つの図形のうち小さい方の面積は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

〔２〕

〔２〕　関数 $y=3\sin\theta-2\sin^3\theta$（$0^\circ \leqq \theta \leqq 210^\circ$）の最大値と最小値を求めたい。そのため $\sin\theta=x$ とおくと，y は

$$y=3x-2x^3$$

と表される。x の動く範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\leqq x\leqq \boxed{\text{シ}}$$

であるから，y は $x=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ をとり，$x=\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ のとき最小値

$\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ をとる。

θ・の関数としては，y は

$\theta=\boxed{\text{ナニ}}^\circ$ および $\theta=\boxed{\text{ヌネノ}}^\circ$ のとき最大

$\theta=\boxed{\text{ハヒフ}}^\circ$ のとき最小

である。

第３問

【１】【２】…必答問題，【３】【４】【５】【６】…選択問題（２題選択）

四面体の四つの頂点を O，L，M，N とする。線分 OL を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 MN の中点を Q とする。a と b を 1 より小さい正の実数とする。線分 ON を $a:(1-a)$ に内分する点を R とし，線分 LM を $b:(1-b)$ に内分する点を S とする。$\vec{l}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\vec{m}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおく。

(1)

$$\overrightarrow{RS}=(\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}})\,\vec{l}+\boxed{\text{ウ}}\,\vec{m}-\boxed{\text{エ}}\,\vec{n}$$

$$\overrightarrow{RP}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\,\vec{l}-\boxed{\text{キ}}\,\vec{n}$$

$$\overrightarrow{RQ}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\,\vec{m}+\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}-\boxed{\text{シ}}\right)\vec{n}$$

が成立する。

(2)　以下 $\vec{l}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{m}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ の場合を考える。

点 S が 3 点 P，Q，R の定める平面上にあるとする。このとき，$\overrightarrow{RS}$ は実数 x と y を用いて

$$\overrightarrow{RS}=x\overrightarrow{RP}+y\overrightarrow{RQ}$$

と表せる。これより

$$x=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}(1-b),\quad y=\boxed{\text{ソ}}\,b$$

となり，a と b は

$$\boxed{\text{タチ}}+\boxed{\text{ツ}}-\boxed{\text{テト}}=0$$

を満たすことがわかる。さらに，$\overrightarrow{RP}$ と $\overrightarrow{RQ}$ が垂直になるのは

$$a=\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad b=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

のときであり，このとき $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ の内積は

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=\frac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

となる。

第 4 問

(1)　方程式

$$z^3=2+2i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を解こう。

複素数 $2+2i$ を極形式で表すと

$$2+2i=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,(\cos\boxed{\text{ウエ}}^\circ+i\sin\boxed{\text{ウエ}}^\circ)$$

となる。

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とおき，①を満たす r，θ（$r>0$，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$）を求めると

$r=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$

$\theta=\boxed{\text{カキ}}°$，$\boxed{\text{クケコ}}°$，255°

となる。

したがって，複素数平面上の第 2 象限にある①の解は

$-\boxed{\text{サ}}+i$

である。

(2)　次に方程式

$z^6-4z^3+8=0$ ································· ②

の解について考えよう。

②は$(z^3-2)^2=-\boxed{\text{シ}}$，すなわち

$z^3=2\pm\boxed{\text{ス}}\,i$

となるから，(1)と同様に考えると，第 2 象限にある②の解は(1)で求めた

$-\boxed{\text{サ}}+i$

と

$$\frac{\boxed{\text{セ}}-\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}+\frac{\boxed{\text{チ}}+\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}\,i$$

の 2 個であり，他の解は第 1 象限に 1 個，第 3 象限に$\boxed{\text{ト}}$個，第 4 象限に$\boxed{\text{ナ}}$個存在する。

注　この問題において複素数平面の象限とは，実軸を x 軸，虚軸を y 軸とした座標平面における象限のことをいう。

第５問

1 枚の硬貨を 3 回投げ，表が出た回数を X とする。次にさいころを X 回振る。(たとえば $X=2$ ならば，さいころを 2 回振ることになる。）そうして，1 または 2 の目が出た回数を Y とする。ただし，$X=0$ の場合は，$Y=0$ ときめる。

(1)　$X=2$ のとき，Y の取り得る値は，$\boxed{\text{ア}}$通りである。

(2)　$X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

$X=2$ という条件のもとで，$Y=1$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

したがって，$X=2$，$Y=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

同様にして

$X=1$，$Y=1$ となる確率は$\dfrac{1}{8}$であり

$X=3$，$Y=1$となる確率は$\dfrac{1}{18}$である。

したがって，$Y=1$となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(3)　(2)と同様に計算すると

$Y=2$となる確率は$\dfrac{5}{72}$であり

$Y=3$となる確率は$\dfrac{1}{216}$である。

したがって，$Y=0$となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタチ}}}$ である。

(4)　Yの平均(期待値)は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(5)　$Y=0$という条件のもとで，$X=2$となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌネ}}}$ である。

第６問

正の整数 a_1，a_2，cが与えられたときに，$s_1=a_1$とし

$$s_i=s_{i-1}+a_i \qquad (i=2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots\cdots\cdots\ ①$$

$$a_{i+2}=a_{i+1}+\left(\frac{s_i}{c}\text{の整数部分}\right) \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots\ ②$$

によって得られる数の列 a_3，a_4，…，a_nを表示させるために，次のようなプログラムを作ってみた。

以下のプログラムにおいて INT(X)は X を越えない最大の整数を与える関数である。

```
100  INPUT ” a1,a2,c・” ;A,B,C
110  INPUT ” n・” ;N
120  S ・ A
130  FOR J・3 TO N
140       A ・ B・INT(S/C)
150       PRINT ” a(” ;J;” )・” ;A
160       B ・ A
170       S ・ S・A
180  NEXT J
190  END
```

このプログラムが意図どおりに動作するかどうか確かめてみる。

⑴　このプログラムを実行し，a1,a2,c・?に対して 1，1，1 を入力し，n・?に対して 6 を入力すると

a(3)・ $\boxed{\text{ア}}$
a(4)・ $\boxed{\text{イ}}$
a(5)・ $\boxed{\text{ウエ}}$
a(6)・ 34

が表示される。また，a(6)が表示される直前の S の値は$\boxed{\text{オカ}}$である。

⑵　次に，定義の式①，②に従って計算してみる。

$a_1=1$，$a_2=1$，$c=1$とすると

$a_3=\boxed{\text{キ}}$，$a_4=\boxed{\text{ク}}$，$a_5=\boxed{\text{ケ}}$，$a_6=\boxed{\text{コサ}}$，…

となる。

⑶　⑴，⑵よりプログラムのどこかに誤りがあることがわかった。このプログラムの 160 行，170 行を修正して，はじめに意図したように動かしたい。

```
130  FOR J・3 TO N
140       A ・ B・INT(S/C)
150       PRINT ” a(” ;J;” )” ;A
160       [ シ ]
170       [ ス ]
180  NEXT J
```

の$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。

⓪ A ・ B　　① B ・ A　　② A ・ A・1　　③ B ・ B・1
④ S ・ S・A　　⑤ S ・ S・B　　⑥ S ・ A　　⑦ S ・ A・B
⑧ S ・ S・1　　⑨ S ・ B・1

⑷　⑶のように修正したプログラムを実行し，a1,a2,c・?に対して 1，1，2 を，n・?に対して 6 を入力するとき，a(6)が表示される直前の B の値は$\boxed{\text{セ}}$である。

【解答１】第１問　〔１〕

〔１〕

$\dfrac{\text{ア}}{\sin \text{イ}\,\theta}$，$\dfrac{2}{\sin 2\theta}$　　$\dfrac{\text{ウエ}\cos \text{オ}\,\theta}{\sin \text{カ}\,\theta}$，$\dfrac{-2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

キ$-\sqrt{\text{ク}}$，$2-\sqrt{3}$　　ケコ，45

サ，2　　シス，15　　セ，4　　ソ，5

〔２〕

〔２〕

タ，4　　チ，0　　$\dfrac{\text{ツ}}{\text{テ}}$，$\dfrac{1}{5}$　　ト$\log_2$ナ，$2\log_2 5$

第２問　〔１〕

〔１〕

ア$a^{イ}$，$-a^2$　　$\dfrac{\sqrt{ウ}}{エ}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$\sqrt{オ}$，$\sqrt{3}$　　$\dfrac{\pi}{カ}-\dfrac{\sqrt{キ}}{ク}$，$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

〔２〕

〔２〕

$\dfrac{ケコ}{サ}$，$\dfrac{-1}{2}$　　シ，1　　$\sqrt{ス}$，$\sqrt{2}$　　$\sqrt{セ}$，$\sqrt{2}$

$\dfrac{ソタ}{チ}$，$\dfrac{-1}{2}$　　$\dfrac{ツテ}{ト}$，$\dfrac{-5}{4}$　　ナニ，45　　ヌネノ，135

ハヒフ，210

第３問

（ア－イ）$\vec{l}$＋ウ$\vec{m}$－エ$\vec{n}$，(1－b)$\vec{l}$＋b$\vec{m}$－a$\vec{n}$

$\dfrac{オ}{カ}\vec{l}$－キ$\vec{n}$，$\dfrac{2}{3}\vec{l}$－a$\vec{n}$　　$\dfrac{ク}{ケ}\vec{m}+\left(\dfrac{コ}{サ}-シ\right)\vec{n}$，$\dfrac{1}{2}\vec{m}+\left(\dfrac{1}{2}-a\right)\vec{n}$

$\dfrac{ス}{セ}$，$\dfrac{3}{2}$　　ソ，2

タチ＋ツ－テト，ab＋a－2b　または　ba＋a－2b

$\dfrac{ナ}{ニ}$，$\dfrac{1}{2}$　　$\dfrac{ヌ}{ネ}$，$\dfrac{1}{3}$　　$\dfrac{ノハヒ}{フヘ}$，$\dfrac{-19}{36}$

第４問

ア$\sqrt{イ}$，$2\sqrt{2}$　　ウエ，45　　$\sqrt{オ}$，$\sqrt{2}$

カキ，15　　クケコ，135　　サ，1

シ，4　　ス，2　　$\dfrac{セ-\sqrt{ソ}}{タ}$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{チ+\sqrt{ツ}}{テ}$，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　ト，2　　ナ，1

第５問

ア，3　　$\dfrac{イ}{ウ}$，$\dfrac{3}{8}$　　$\dfrac{エ}{オ}$，$\dfrac{4}{9}$　　$\dfrac{カ}{キ}$，$\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{クケ}{コサ}$，$\dfrac{25}{72}$　　$\dfrac{シスセ}{ソタチ}$，$\dfrac{125}{216}$　　$\dfrac{ツ}{テ}$，$\dfrac{1}{2}$　　$\dfrac{トナ}{ニヌネ}$，$\dfrac{36}{125}$

第６問

ア，2　　イ，5　　ウエ，13　　オカ，21　　キ，2

ク，4　　ケ，8　　コサ，16　　シ，5　　ス，1

セ，3