

関数の極限を求める問題の解法には、主に下記7つのタイプがある。

I. 式変形タイプ……簡単な式変形によって解くタイプ。主に下記3つのタイプがある。

i. 因数分解・約分タイプ …… 分数の形で、分母・分子(またはどちらか)を因数分解して約分することによって、不定形を解消して、代入して解くタイプ。

$x \rightarrow a$ の極限で、 $\frac{0}{0}$ の不定形になる場合に考える。「因数分解」→「約分」→「代入」とイメージ!

ii. 1番強い項でくくるタイプ …… 1番強い項(次数が高い)でくくる(分数の場合は、分母の1番強い項で、分母・分子を割ると考えても同じ)ことによって解くタイプ。

$x \rightarrow \infty$ の極限で、 $\frac{\infty}{\infty}$ や $\infty - \infty$ の不定形になる場合に考える。 $x \rightarrow \pm\infty$ のときは $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ (k は自然数) を使うことがポイント!

iii. 有理化タイプ …… 有理化することによって、不定形を解消して解くタイプ。

無理式が入っている不定形の場合に考える。 $\frac{0}{0}$ の不定形は、「約分」→「不定形解消」に、 $\infty - \infty$ の不定形は、「ii. 1番強い項でくくるタイプ」になることが多い。

II. 三角関数の極限公式タイプ …… 三角関数の極限公式を用いて解くタイプ。

三角関数を含む不定形の極限のときに考える。

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の公式が使えるように変形することがポイント!

準公式として $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ の公式も覚えるとよい。

使い方のイメージ

$\frac{\sin \star}{\star} \left(\frac{\star}{\sin \star} \right)$ の形を作って
 $\star \rightarrow 0$ のとき、極限値は1!

III. はさみうちの原理タイプ …… はさみうちの原理を用いて解くタイプ。

『数列の極限』等、直接極限を求めることができないときに使う。ガウス記号を含むときや「 $x \rightarrow \infty$ で『(減少関数) × (周期関数)』」例: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ のときに考える。

はさみうちの原理 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \alpha$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \alpha$

IV. 微分係数の定義タイプ …… 微分係数の定義を用いて解くタイプ

微分係数の定義 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ にあてはまるときに使う。

V. eに関する極限公式タイプ …… eに関する極限公式を用いて解くタイプ。

1^∞ の不定形の極限は $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ の公式を用いて解くことを考える。

対数関数を含む不定形の極限は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ の公式を用いて解くことを考える。

指数関数を含む不定形の極限は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ の公式を用いて解くことを考える。

VI. 平均値の定理タイプ …… 平均値の定理を用いて解くタイプ。 ※関数の極限では省略。

VII. 区分求積法タイプ …… 区分求積法を用いて解くタイプ。 ※関数の極限では省略。