Visual Memory Chart 2次・３次方程式の整数解問題の解法 チャート

2次・３次方程式の整数解問題とは？

２次・３次方程式が整数解をもつ条件についての問題は，大きく『すべての解が整数』か『１つの解のみが整数（or少なくとも１つが整数）』の２通りのタイプがある。解法は大きく異なるので，それぞれの解法を整理してマスターしよう。

２次方程式の整数解問題

２次方程式の整数解問題は，どのタイプでも，まずは，解が整数解をもつならば，実数解をもつことが必要なので，判別式 $D \geqq 0$ より，解を絞り込めないかチェック！する。３次方程式の場合は，この解法ができないことに注意！

Ⅰ．２解とも整数解タイプ

２次方程式 実践例題①，②，③－２参照

■ **問題例** 文字が入った２次方程式が与えられていて，２つの解がすべて整数になるときの，文字と解を求めさせる問題。

解法のポイント

２次方程式が２解とも整数となる場合は，『解と係数の関係』を用いて解く。
解と係数の関係から，文字を消去すると，α と β の不定方程式の整数解問題に帰着する。

解と係数の関係 ２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

Ⅱ．１つの解が整数解（or少なくとも１つの解が整数解）タイプ

２次方程式 実践例題③－１，④，⑤参照

■ **問題例** 文字が入った２次方程式が与えられていて，少なくとも1つの解が整数であるときの，文字または他の解を求めさせる問題。

解法は主に下記２通りの方法がある。

解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ → ココを n^2とおく！

解法①の手順

STEP1 ２次方程式の解の公式より，解を求める。

STEP2 解のうち，１つの解が整数になるためには，$\sqrt{\ }$（ルート）が消えなければいけないので
ルートの中身が平方数（＝(整数)^2）になることが必要なので，(ルートの中身)＝n^2（nは整数）とおく。

STEP3 (整数)$^2 \pm n^2$＝（整数）の形になるように変形し，これを満たす組み合わせを考える。

解法②の手順

STEP1 文字（整数の条件がある）について整理し，『文字』＝『分数式』とする。

STEP2 文字は整数なので，『分数式』が整数になるような，整数解を求める。

Point! 分数式は，割り算をして
『分子の次数』＜『分母の次数』
となるように，変形する！

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が整数になるとき，$|f(x)| \geqq |g(x)|$ となることが必要！

３次方程式の整数解問題

Ⅰ．すべての解（３つの解）が整数解タイプ

３次方程式 実践例題①，②，③参照

■ **問題例** 文字が入った３次方程式が与えられていて，３つの解がすべて整数になるときの，文字と解を求めさせる問題。

解法のポイント 『因数定理』を用いて，因数分解してもよい！

因数定理 $f(a)=0 \Leftrightarrow f(x)$ が $x-a$ を因数にもつ。

まずは，因数分解してみる。２文字以上を含む式の因数分解は，次数の低い文字について整理するとうまく因数分解できることが多い。因数分解できると，「２次方程式の整数解問題」に帰着したり，解が容易に絞れる。
因数分解できないときは，２次方程式の整数問題同様，『解と係数の関係』を用いて解を絞っていく。

Ⅱ．1つの解が整数解タイプ（or少なくとも１つの解が整数解）タイプ

３次方程式 実践例題⑤，⑥，⑦参照

■ **問題例** 文字（整数の条件がある）が入った３次方程式が与えられていて，少なくとも1つの解が整数であるときの，文字または他の解を求めさせる問題。

解法のポイント

３つの解がすべて整数解とは限らないので，『解と係数の関係』を使ってもうまく解けない。
そこで，定数項に着目するが，定数項が「素数である場合」と「素数でない場合」によって，２通りの解法がある。

定数項が素数の場合の解法の手順 ※３次方程式を $ax^3+bx^2+cx+d=0$ とする。

STEP1 整数解を α とおいて，方程式に代入する。 $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$

STEP2 定数項を分離して，『定数（素数）』＝ の形に変形する。$d=-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha$

STEP3 α でくくり，『定数（素数）』＝積 の形にする。$d=\alpha(-a\alpha^2-b\alpha-c)$

STEP4 定数 d の約数に着目して，整数解を求める。 $(\alpha,\ -a\alpha^2-b\alpha-c)=(1,d),\ (d,1),\ (-1,-d),\ (-d,-1)$

定数項が素数でない場合の解法

２次方程式の整数解問題の『Ⅱの解法②』と同様にして解く。

２次方程式の整数解問題　実践例題①

例題１

2次方程式 $x^2+(a-1)x+a^2-3a+1=0$ の２つの解が整数となるような整数 a の値を求めよ。

解答　２次方程式の整数解問題は，まずは，判別式 $D \geqq 0$ より，範囲が絞れないか試してみる。この場合，解が絞れることができる。

$x^2+(a-1)x+a^2-3a+1=0$ ……①とおく。

①の２次方程式が整数解をもつことより，実数解をもつことが必要なので，

判別式を D とすると

$D=(a-1)^2-4(a^2-3a+1)=-3a^2+10a-3 \geqq 0$

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ → コレを $D=b^2-4ac$ とおくと
$D \geqq 0$ のとき，異なる２つの実数解をもつ。
$D=0$ のとき，重解をもつ。
$D<0$ のとき，解はない。

$3a^2-10a+3 \leqq 0$

$(3a-1)(a-3) \leqq 0$

$\therefore\ \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 3$ ← 範囲が絞れた！

よって，この範囲を満たす整数 a は，$a=1, 2, 3$ となる。

（ｉ）$a=1$ のとき，

①に代入して

$x^2-1=0$

$\Leftrightarrow\ (x+1)(x-1)=0$ ← $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$\therefore\ x=\pm 1$　これは題意を満たす。← ２つの解が整数解になった

（ii）$a=2$ のとき，

①に代入して

$x^2+x-1=0$

これは整数解をもたないので不適。

（iii）$a=3$ のとき，

$x^2+2x+1=0$

$\Leftrightarrow\ (x+1)^2=0$ ← $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$\therefore\ x=-1$　これは題意を満たす。← ２つの解（重解）が整数解になった

以上，（ｉ）（ii）（iii）より，$a=1, 3$ ……（答え）

２次方程式の整数解問題　実践例題②

例題２

xの2次方程式 $x^2-(k+4)x+2k+10=0$ の２つの解が，ともに整数であるような整数kの値を求めよ。（同志社大）

解答　２次方程式の整数解問題は，まずは，判別式$D \geqq 0$より，範囲が絞れないか試してみるがこの場合絞れない。そこで２解とも整数解タイプなので，『解と係数の関係』より解を絞る。

$x^2-(k+4)x+2k+10=0$ の整数解をα，β（$\alpha \leqq \beta$）とおくと，

『解と係数の関係』より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=k+4 & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=2k+10 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

解と係数の関係
２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解をα，βとすると
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

①より

$k=\alpha+\beta-4$

これを②に代入して

$\alpha\beta=2(\alpha+\beta-4)+10$

$\Leftrightarrow \alpha\beta-2\alpha-2\beta=2$

$axy+bx+cy=d$タイプの解法は
（xの１次式）（yの１次式）＝（整数）の形に変形し，
解を絞り込む。

$\Leftrightarrow \alpha(\beta-2)-2\beta=2$　αでくくった

$\Leftrightarrow \alpha(\beta-2)-2(\beta-2)-4=2$　$(\beta-2)$をつくった

$\Leftrightarrow \alpha(\beta-2)-2(\beta-2)=6$　-4を移項した

$\Leftrightarrow (\alpha-2)(\beta-2)=6$　$(\beta-2)$でくくった

$\alpha \leqq \beta$ より　$\alpha-2 \leqq \beta-2$ となるので　両辺から2を引いた

$(\alpha-2,\ \beta-2)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (-6,\ -1),\ (-3,\ -2)$　掛けて6になる組み合わせを考えた

$\therefore$　$(\alpha,\ \beta)=(3,\ 8),\ (4,\ 5),\ (-4,\ 1),\ (-1,\ 0)$ ……（答え）

別解

$x^2-(k+4)x+2k+10=0$ を解くと

$$x=\frac{k+4\pm\sqrt{k^2-24}}{2}$$

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ここで，２解が整数となるには，ルートが外れる。

つまり k^2-24 が整数の平方数となることが必要である。

よって，$k^2-24=n^2$（nは整数）とおくと，

$k^2-n^2=24$

$\Leftrightarrow (k-n)(k+n)=24$

以下，候補を絞って，掛けて24になる組み合わせを考える。以下略。

２次方程式の整数解問題　実践例題③−１

例題３

2次方程式 $x^2+(a-1)x-3a+1=0$ が整数解を少なくとも１つもつとき，
整数 a の値を求めよ。

解答 ２次方程式の整数解問題は，まずは，判別式 $D \geqq 0$ より，範囲が絞れないか試してみるが，この場合絞れない。そこで，文字（整数）について整理し，文字が整数になることより，解を絞っていく。

$x^2+(a-1)x-3a+1=0$ ……①

を a について整理すると

$a(x-3)=-x^2+x-1$

ここで，$x=3$ を代入すると

$0=-7$ となり不適。

よって，$x \neq 3$ より，①の両辺を $x-3$ で割ると　文字で割るときは注意！

$$\Leftrightarrow\ a=\frac{-x^2+x-1}{x-3}=-x-2-\frac{7}{x-3}$$

割り算をして，分子の次数＜分母の次数とした

$$\begin{array}{r|l} & -x-2 \\ \hline x-3 & -x^2+x-1 \\ & -(-x^2+3x) \\ \hline & -2x-1 \\ & -(-2x+6) \\ \hline & -7 \end{array}$$

ここで，１つの整数解を α とおくと

$\underset{\text{整数}}{a}=\underset{\text{整数}}{-\alpha-2}-\dfrac{7}{\alpha-3}$ ……②　とおく。　α を代入

a は整数であることより，a が整数であるには $\dfrac{7}{\alpha-3}$ が整数でなければならない。

よって，$\alpha-3=-7,-1,1,7$ のとき，a は整数となる。　$(\alpha-3)$ が 7 の約数であればよい

∴　$\alpha=-4,2,4,10$

$\alpha=-4$ のとき，②に代入して，$a=3$ これは，整数となり，題意を満たす。

$\alpha=2$ のとき，②に代入して，$a=3$ これは，整数となり，題意を満たす。

$\alpha=4$ のとき，②に代入して，$a=-13$ これは，整数となり，題意を満たす。

$\alpha=10$ のとき，②に代入して，$a=-13$ これは，整数となり，題意を満たす。

以上より，$a=3,-13$ ……（答え）

※ 別解　実践例題⑤−２参照

2次方程式の整数解問題 実践例題③ー２

例題３

2次方程式 $x^2+(a-1)x-3a+1=0$ が整数解を少なくとも１つもつとき，
整数 a の値を求めよ。

別解　この問題は「２解が整数解」と書いてはいないが，『解と係数の関係』から求めると，２解が整数解となっている。まれに，問題に「２解が整数解」とは書かれていなくても，「２解が整数解」となっている場合もある。

$x^2+(a-1)x-3a+1=0$ の整数解を α , 他の解を β（$\alpha \leqq \beta$）とおくと，

『解と係数の関係』より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1-a & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=-3a+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解と係数の関係
２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α , β とすると
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

α と a は整数なので，①により β も整数である。 ← $\beta=1-a-\alpha=1-$ 整数 $-$ 整数　となるので

①×3－②より ← a を消すため

$3(\alpha+\beta)-\alpha\beta=2$

$\Leftrightarrow\ 3\alpha+3\beta-\alpha\beta=2$ ← $axy+bx+cy=d$ タイプの解法は（x の１次式）（y の１次式）＝（整数）の形に変形し，解を絞り込む。

$\Leftrightarrow\ \alpha(3-\beta)+3\beta=2$ ← α でくくった

$\Leftrightarrow\ -\alpha(\beta-3)+3\beta=2$ ← $-$ を掛けた

$\Leftrightarrow\ -\alpha(\beta-3)+3(\beta-3)+9=2$ ← $(\beta-3)$ をつくった

$\Leftrightarrow\ -\alpha(\beta-3)+3(\beta-3)=-7$ ← 9を移項した

$\Leftrightarrow\ (3-\alpha)(\beta-3)=-7$ ← $(\beta-3)$ でくくった

$\Leftrightarrow\ (\alpha-3)(\beta-3)=7$ ← $-$ を掛けた

$\alpha \leqq \beta$ より　$\alpha-3 \leqq \beta-3$　となるので ← 両辺から3を引いた

$(\alpha-3,\ \beta-3)=(1,\ 7),\ (-7,\ -1)$ ← 掛けて7になる組み合わせを考えた

よって，$(\alpha,\beta)=(4,\ 10),(-4,\ 2)$

この値をそれぞれ①に代入して，

$a=3,\ -13$ ……（答え）

2次方程式の整数解問題　実践例題④

例題4

m を整数とする。方程式 $mx^2+16x+m+2=0$ の解のうち，少なくとも1つが整数であるような m の値をすべて求めよ。（学習院大）

解答　2次方程式の整数解問題は，まずは，判別式 $D \geqq 0$ より，範囲が絞れないか試してみる。この場合絞れない。そこで，解の公式から解を求め，絞っていく。

$mx^2+16x+m+2=0$ ……①　とおく。

$m=0$ のとき　← 2次方程式とは書いてないので，$m=0$ の可能性があるので調べる。

①は $16x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{8}$

これは整数解でないので不適。

よって，$m \neq 0$ より

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-m\cdot(m+2)}}{m}=\frac{-8\pm\sqrt{-m^2-2m+64}}{m} \cdots\cdots ②$$ とおく。

← 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

ここで，解のうち1つが整数となるには，ルートが外れる。

つまり $-m^2-2m+64$ が整数の平方数となることが必要である。← 例えば $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$　平方数

よって，$-m^2-2m+64=n^2$（nは整数）とおくと，

$m^2+2m+n^2=64$

平方完成した

$\Leftrightarrow (m+1)^2+n^2=65$

$(m+1)^2$ と n^2 は0以上の平方数で

$(m+1)^2 \leqq 65$ より

$(m+1)^2=1,\ 16,\ 49,\ 64$ となるので

$m+1=\pm1, \pm4,\ \pm7, \pm8$ ← $\alpha^2=a$（$a \geqq 0$）のとき $\alpha=\pm\sqrt{a}$

$\therefore\ m=-9, -8, -5, -2, 3, 6, 7$

少なくとも1つが整数でなければいけないので

（i）$m=-9$ のとき，②に代入して，方程式①の解は，$x=\dfrac{7}{9},\ 1$

（ii）$m=-8$ のとき，②に代入して，方程式①の解は $x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$　これは整数解ではないので不適。

（iii）$m=-5$ のとき，②に代入して，方程式①の解は $x=\dfrac{1}{5},\ 3$

（iv）$m=-2$ のとき，②に代入して，方程式①の解は $x=0,\ 8$

（v）$m=3$ のとき，②に代入して，方程式①の解は $x=-\dfrac{1}{3},\ -5$

（vi）$m=6$ のとき，②に代入して，方程式①の解は $x=-\dfrac{2}{3},\ -2$

（vii）$m=7$ のとき，②に代入して，方程式①の解は $x=-1,\ -\dfrac{7}{9}$

以上，（i）～（vii）より，求める m の値は，$m=-9, -5, -2, 3, 6, 7$ ……（答え）

２次方程式の整数解問題　実践例題⑤

例題５

2次方程式 $ax^2-(a-3)x+a-2=0$ が少なくとも１つの整数解をもつように整数 a の値とそのときの整数解を求めよ。

解答　２次方程式の整数解問題は，まずは，判別式 $D \geqq 0$ より，範囲が絞れないか試してみるがこの場合絞れない。そこで，文字について整理し，文字が整数となることから解を絞っていく。

$ax^2-(a-3)x+a-2=0$

$\Leftrightarrow\ a(x^2-x+1)=-3x+2$ ……①　← a について整理

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より　← 平方完成した

$a=\dfrac{-3x+2}{x^2-x+1}$　← $x^2-x+1\neq 0$ より，①の両辺を x^2-x+1 で割った

１つの整数解を α とおくと

$a=\dfrac{-3\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+1}$ …②　← α を代入

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が整数となる。$\Rightarrow\ |f(x)|\geqq|g(x)|$

a は整数であることより，$\dfrac{-3\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+1}$ が整数であるには

$|-3\alpha+2|\geqq|\alpha^2-\alpha+1|$ ……③ であることが必要である。

$|\alpha^2-\alpha+1|=\alpha^2-\alpha+1$ となるので　← $\alpha^2-\alpha+1=\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より

$|-3\alpha+2|\geqq\alpha^2-\alpha+1$

$\therefore\quad \alpha^2-\alpha+1\leqq-3\alpha+2$ ……④

または $-3\alpha+2\leqq-(\alpha^2-\alpha+1)$ ……⑤

← $|x|\geqq a$ のとき　$x\leqq -a$，$a\leqq x$

④より　$\alpha^2+2\alpha-1\leqq 0$

$\therefore\ -1-\sqrt{2}\leqq\alpha\leqq-1+\sqrt{2}$

α は整数なので，これを満たすのは，$\alpha=-2,-1,0$

⑤より　$\alpha^2-4\alpha+3\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ (\alpha-3)(\alpha-1)\leqq 0$

$\therefore\ 1\leqq\alpha\leqq 3$　← $\alpha\leqq\beta$ のとき，$(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0 \Leftrightarrow \alpha\leqq x\leqq\beta$

α は整数なので，これを満たすのは，$\alpha=1,2,3$

以上より，$\dfrac{-3\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+1}$ が整数である条件は，

$\alpha=-2,-1,0,1,2,3$

（ⅰ）$\alpha=-2$ のとき，②に代入して

$a=\dfrac{8}{7}$ となり，整数ではないので不適。

（ⅱ）$\alpha=-1$ のとき，②に代入して

$a=\dfrac{5}{3}$ となり，整数ではないので不適。

（ⅲ）$\alpha=0$ のとき，②に代入して

$a=2$ となり，整数となるので

①に代入して

$2x^2+x=0$

$\Leftrightarrow\ x(2x+1)=0$

$\therefore\quad x=0,\ -\dfrac{1}{2}$

例えば

$\dfrac{8}{2}$ 分子(8)＞分母(2)
⇒整数となる。
$\dfrac{3}{9}$ 分子(3)＜分母(9)
⇒整数にはならない。

（ⅳ）$\alpha=1$ のとき，②に代入して

$a=-1$ となり，整数となるので

①に代入して

$-x^2+4x-3=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-4x+3=0$

$\Leftrightarrow\ (x-3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ 3$

（ⅴ）$\alpha=2$ のとき，②に代入して

$a=-\dfrac{4}{3}$ となり，整数ではないので不適。

（ⅵ）$\alpha=3$ のとき，②に代入して

$a=-1$ となり，これは，（ⅳ）の場合と同じ。

以上，（ⅰ）～（ⅵ）より，$a=2$ のとき，整数解は，0

$a=-1$ のとき，整数解は，1，3である。…（答え）

３次方程式の整数解問題　実践例題①

例題１

x の３次方程式 $x^3-\left(\dfrac{a}{2}+1\right)x^2+(a-4)x-\left(\dfrac{a}{2}-4\right)=0$ の３つの解がすべて整数になるような a の値をすべて求めよ。（日本大　改）

解答　まずは，文字 a について整理し因数分解できないか試してみる。この場合，因数分解できて，２次方程式の２解が整数解タイプに帰着する。

$(x^3-x^2-4x+4)-\dfrac{a}{2}(x^2-2x+1)=0$ ← a について整理

$\Leftrightarrow\ \{x^2(x-1)-4(x-1)\}-\dfrac{a}{2}(x-1)^2=0$ ← 共通因数 $(x-1)$ をつくった

$\Leftrightarrow\ (x-1)\left\{x^2-4-\dfrac{a}{2}(x-1)\right\}=0$ ← $(x-1)$ でくくった

$\Leftrightarrow\ (x-1)\left(x^2-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}-4\right)=0$ ← 整理した

$\therefore\ x=1$ または $x^2-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}-4=0$ ← 因数分解することで１つの解が見つかったので解法が楽になる！

題意より，３つの解がすべて整数になるには

2次方程式 $x^2-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}-4=0$ が２つの整数解を持てばよい。

よって，２つの整数解を α，β（$\alpha<\beta$）とすると，

『解と係数の関係』より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{a}{2} & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=\dfrac{a}{2}-4 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

← 解と係数の関係
２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

①を②に代入すると

$\alpha\beta=(\alpha+\beta)-4$

$\Leftrightarrow\ \alpha\beta-\alpha-\beta+4=0$ ← $axy+bx+cy=d$ タイプの解法は（x の１次式）（y の１次式）＝（整数）の形に変形し，解を絞り込む。

$\Leftrightarrow\ \alpha(\beta-1)-\beta+4=0$ ← α でくくった

$\Leftrightarrow\ \alpha(\beta-1)-(\beta-1)-1+4=0$ ← $(\beta-1)$ をつくった

$\Leftrightarrow\ (\alpha-1)(\beta-1)=-3$ ← $(\beta-1)$ でくくった

$\alpha\leqq\beta$ より　$\alpha-1\leqq\beta-1$　となるので ← 両辺から1を引いた

$(\alpha-1,\ \beta-1)=(-1,\ 3),\ (-3,\ 1)$ ← 掛けて -3 になる組み合わせを考えた

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(0,\ 4),\ (-2,\ 2)$

$(\alpha,\ \beta)=(0,\ 4)$ のとき，①より，$a=2(0+4)=8$

$(\alpha,\ \beta)=(-2,\ 2)$ のとき，①より，$a=2(-2+2)=0$

以上より，求める a の値は，$a=0,\ 8$ ……（答え）

３次方程式の整数解問題　実践例題②

例題２

３次方程式 $x^3-12x^2+47x+a=0$ が相異なる３つの整数解をもつとき，a の値および方程式の解を求めよ。（青山学院大）

解答　まずは，文字 a について整理し因数分解できないか試してみる。この場合できない。
そこで，３つの解が整数解タイプなので，『解と係数の関係』を用いて，解を絞っていく。

３次方程式 $x^3-12x^2+47x+a=0$ が異なる３つの整数解を α，β，γ とすると，
『解と係数の関係』より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=12 & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=47 & \cdots\cdots ② \\ \alpha\beta\gamma=-a & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

解と係数の関係

３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α，β，γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

①より　$\beta+\gamma=12-\alpha$ ……④

②より　$\beta\gamma=47-\alpha(\beta+\gamma)$ ……⑤

⑤に④を代入して

$\beta\gamma=47-\alpha(12-\alpha)=\alpha^2-12\alpha+47$ ……⑥

④，⑥より，β，γ を２解にもつ２次方程式は

$t^2-(12-\alpha)t+\alpha^2-12\alpha+47=0$ ……⑦　と表せる。

与えられた２数を解にもつ2次方程式

$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，
α，β は２次方程式 $x^2-px+q=0$ の２解。

⑦の判別式を D とすると

$D=(12-\alpha)^2-4(\alpha^2-12\alpha+47)=-3\alpha^2+24\alpha-44=-3(\alpha-4)^2+4$ ……⑧

条件より，⑦が整数解を持つ条件は，実数解をもつことが必要で $D>0$，さらに，D が平方数でなければいけない。$D>0$ から，平方数になるときは，$D=1$，4 の２つの場合しかない。

$D=-3(\alpha-4)^2+4$ より，
$(\alpha-4)^2=0$ のとき，$D=4$
$(\alpha-4)^2=1$ のとき，$D=1$
$(\alpha-4)^2=4$ のとき，$D=\cancel{-8}$

（Ⅰ）$D=1$ のとき，⑧に代入して

$-3(\alpha-4)^2+4=1 \Leftrightarrow -3(\alpha-4)^2=-3 \Leftrightarrow (\alpha-4)^2=1$

$\Leftrightarrow \alpha-4=\pm1$

$\alpha^2=a$（$a\geqq0$）のとき
$\alpha=\pm\sqrt{a}$

$\therefore\ \alpha=3,\ 5$

（Ⅱ）$D=4$ のとき，⑧に代入して

$-3(\alpha-4)^2+4=4 \Leftrightarrow -3(\alpha-4)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-4)^2=0$

$\Leftrightarrow\ \alpha-4=0$

$\therefore\ \alpha=4$

（ⅰ）$\alpha=3$ のとき，⑦に代入して

$t^2-9t+20=0 \Leftrightarrow (t-4)(t-5)=0$

$\therefore\ t=4,\ 5$

（ⅱ）$\alpha=4$ のとき，⑦に代入して

$t^2-8t+15=0 \Leftrightarrow (t-3)(t-5)=0$

$\therefore\ t=3,\ 5$

（ⅲ）$\alpha=5$ のとき，⑦に代入して

$t^2-7t+12=0 \Leftrightarrow (t-3)(t-4)=0$

$\therefore\ t=3,\ 4$

以上，（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より，解は，3，4，5

よって，③から

求める a の値は，$a=-3\cdot4\cdot5=-60$ ……（答え）

３次方程式の整数解問題　実践例題③

例題３

k は整数であり，３次方程式 $x^3-13x+k=0$ は３つの異なる整数解をもつとき，
k の値および方程式の解を求めよ。（一橋大）

解答　すべての解が整数解問題で，因数分解できないので，『解と係数の関係』から解を絞っていく。

３次方程式 $x^3-13x+k=0$ が異なる３つの整数解を α，β，γとすると，『解と係数の関係』より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-13 & \cdots\cdots② \\ \alpha\beta\gamma=-k & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

解と係数の関係

３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α，β，γとすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

①より　$\gamma=-\alpha-\beta$

②に①を代入して

$$\alpha\beta+\beta(-\alpha-\beta)+\alpha(-\alpha-\beta)=-13$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-13=0\quad\cdots\cdots④$$

④の方程式（α の２次方程式）が整数解をもつことより，
実数解をもつことが必要なので，判別式をDとすると

$$D=\beta^2-4(\beta^2-13)=-3\beta^2+52\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 3\beta^2\leqq 52$$

範囲が絞れた！

$$\Leftrightarrow\quad \beta^2\leqq\frac{52}{3}=17.3\cdots\quad\cdots\cdots⑤$$

すべてが負の解だったら，
足して0になるはずがない

ここで，$\alpha+\beta+\gamma=0$ ……①より，少なくとも１つの解は正で
α，β，γは対称式なので，$\beta>0$ としても一般性は失わない。
よって，⑤を満たす β の値は，$\beta=1, 2, 3, 4$

対称式→α，β，γ
の値を入れ替えても
変わらない式のこと

（ⅰ）$\beta=1$のとき，④に代入して

$$\alpha^2+\alpha-12=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\alpha+4)(\alpha-3)=0$$

$$\therefore\quad \alpha=-4,\ 3$$

$\alpha=-4$のとき，①より

$\gamma=3$

$\alpha=3$のとき，①より

$\gamma=-4$

（ⅱ）$\beta=2$のとき，④に代入して

$$\alpha^2+2\alpha-9=0$$

$\therefore\quad \alpha=-1\pm\sqrt{10}$　これは整数解ではないので不適。

（ⅲ）$\beta=3$のとき，④に代入して

$$\alpha^2+3\alpha-4=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\alpha+4)(\alpha-1)=0$$

$$\therefore\quad \alpha=-4,\ 1$$

$\alpha=-4$のとき，①より

$\gamma=1$

$\alpha=1$のとき，①より

$\gamma=-4$

（ⅳ）$\beta=4$のとき，④に代入して

$$\alpha^2+4\alpha+3=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\alpha+1)(\alpha+3)=0$$

$$\therefore\quad \alpha=-3,\ -1$$

$\alpha=-3$のとき，①より

$\gamma=-1$

$\alpha=-1$のとき，①より

$\gamma=-3$

以上，（ⅰ）～（ⅳ）より

解は，$(-4, 1, 3)$，$(-3, 4, -1)$

解が，$(-4, 1, 3)$のとき，

③に代入して，$k=12$

解は，$(-3, 4, -1)$のとき，

③に代入して，$k=-12$ ……（答え）

3次方程式の整数解問題　実践例題④

例題4

a, bを整数とする。３次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は３つの実数解 α, β, γをもち，
$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α, β, γのうち，どれかは整数である。a, bの値を求めよ。　（一橋大）

解答　１つの解が整数解タイプで定数項が素数なので，「定数（素数）」＝ 積 の形にして，定数項の約数に着目して，解を絞る。

$x^3+ax^2+bx-1=0$ ……①　とおく。

$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α, β, γのうち，どれかは整数であるので，

解は，$x=1$ または $x=2$に絞られる。

ここで，整数解を$x=n$（$0<n<3$）すると，①に代入して

$n^3+an^2+bn-1=0$

$\Leftrightarrow$ $n(n^2+an+b)=1$ ← nでくくって，定数1を分離した。積＝定数（素数）にすることで，解が絞られる！

n と n^2+an+b は整数で，$n>0$ より

$n=1$ つまり，１つの解は，$x=1$ であることがわかった。

これを①に代入して，

$1+a+b-1=0$

$\therefore$ $b=-a$ ……②

さらに，これを①に代入して，

$x^3+ax^2+bx-1=x^3+ax^2-ax-1=(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}$ ← $x=1$ を解に持つので，$(x-1)$ を因数に持つことがわかるので因数分解できる！

よって，$x^2+(a+1)x+1=0$ は，

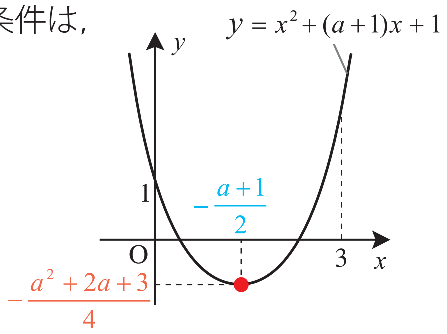
$0<x<3$ において，$x=1$ 以外の異なる２つの実数解を持つ。

$f(x)=x^2+(a+1)x+1=\left(x+\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{a^2+2a+3}{4}$ とおくと，求める条件は，（平方完成した）

$$\begin{cases} f(0)=1>0 \;\cdots\cdots③ \\ f(3)=9+3(a+1)+1=3a+13>0 \;\cdots\cdots④ \\ \text{頂点の}x\text{座標}\quad 0<-\dfrac{a+1}{2}<3 \;\cdots\cdots⑤ \\ \text{頂点の}y\text{座標}\quad -\dfrac{a^2+2a+3}{4}<0 \;\cdots\cdots⑥ \\ f(1)=1+a+1+1=a+3\neq 0 \;\cdots\cdots⑦ \end{cases}$$

← 判別式$D>0$でも可

（⑦）← $x=1$ 以外の解なので



③は常に成り立つ。

④から $a>-\dfrac{13}{3}$ ……⑧

⑤から $-7<a<-1$ ……⑨

⑥から $a^2+2a-3>0 \Leftrightarrow (a+3)(a-1)>0$

$\therefore$ $a<-3$，$1<a$ ……⑩

⑦から $a\neq-3$ ……⑪

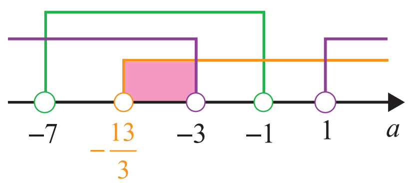
⑧, ⑨, ⑩, ⑪より共通範囲を求めて

$-\dfrac{13}{3}<a<-3$

aは整数より，$a=-4$

②に代入して $b=4$

$\therefore$ $a=-4$，$b=4$ ……（答え）



3次方程式の整数解問題　実践例題⑤ー１

例題５

$x^3+nx^2-(5-n)x+2=0$　の１つの解が正の整数であるとき，他の解を求めよ。
ただし，nは正の整数とする。（芝浦工大）

解答　１つの解が整数解タイプで定数項が素数なので，「定数（素数）」＝ 積 の形にして，
定数項の約数に着目して，解を絞る。

$x^3+nx^2-(5-n)x+2=0$ ……①　の１つの正の整数解を α（$\alpha \geqq 1$）とおき，①に代入して

$\alpha^3+n\alpha^2-(5-n)\alpha+2=0$

$\Leftrightarrow\ \alpha^3+n\alpha^2-(5-n)\alpha=-2$　← 2を移項した

$\Leftrightarrow\ \alpha\{\alpha^2+n\alpha-5+n\}=-2$　← αでくくって，「定数（素数）」＝ 積 の形にした

よって，$\alpha \geqq 1$を考慮し

$(\alpha,\ \alpha^2+n\alpha-5+n)=(1,-2),\ (2,-1)$　← 掛けて-2になる組み合わせを考えた

となる。

（ｉ）$(\alpha,\ \alpha^2+n\alpha-5+n)=(1,-2)$のとき，

$\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha^2+n\alpha-5+n=-2\end{cases}$

$\alpha=1$ を

$\alpha^2+n\alpha-5+n=-2$ に代入して

$1+n-5+n=-2$

$\Leftrightarrow\ 2n=2$

$\therefore\ n=1$

となり，題意を満たす。

このとき，①に代入して

$x^3+x^2-4x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x-2)=0$　← $x=1$を解に持つので，$(x-1)$を因数に持つことがわかるので因数分解できる！

よって，$x=1$以外の解は $x^2+2x-2=0$ の解より

$x=-1\pm\sqrt{3}$　← ２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

（ii）$(\alpha,\ \alpha^2+n\alpha-5+n)=(2,-1)$のとき，

$\begin{cases}\alpha=2\\ \alpha^2+n\alpha-5+n=-1\end{cases}$

$\alpha=2$ を

$\alpha^2+n\alpha-5+n=-2$ に代入して

$4+2n-5+n=-1$

$\Leftrightarrow\ 3n=0$

$\therefore\ n=0$

これは，正の整数ではないので不適。

よって，$x=1$以外の解は $x=-1\pm\sqrt{3}$ ……（答え）　　※ 別解　実践例題①－２参照

３次方程式の整数解問題　実践例題⑤－２

例題５

$x^3+nx^2-(5-n)x+2=0$　の１つの解が正の整数であるとき, 他の解を求めよ。
ただし, nは正の整数とする。（芝浦工大）

解答　１つの解が整数解タイプで定数項が素数ではないので, 文字nが（正の）整数の条件より, 文字について解き, 文字が整数となる整数解の組み合わせを求める。

$x^3+nx^2-(5-n)x+2=0$ をnについて整理すると

$n(x^2+x)=-x^3+5x-2$ ……①

$\Leftrightarrow\ nx(x+1)=-x^3+5x-2$ ← xでくくった

ここで, $x=0$ を代入すると　$0=-2$ となり不適。

同様に, $x=-1$ を代入すると　$0=-6$ となり不適。

よって, $x(x+1)\neq 0$ より, ①の両辺を $x(x+1)\neq 0$ で割ると

文字で割るときは注意！

$$n=\frac{-x^3+5x-2}{x^2+x}$$

$$=-x+1+\frac{4x-2}{x^2+x}$$ ← 割り算をして, 分子の次数＜分母の次数とした

$$\begin{array}{r} -x+1 \\ x^2+x\,\big)\overline{-x^3\qquad+5x-2} \\ -\ \ -x^3-x^2\qquad\qquad \\ \hline x^2+5x-2 \\ -\ \ x^2+\ \ x \\ \hline 4x-2 \end{array}$$

ここで, １つの正の整数解をα（$\alpha\geqq 1$）とおくと

$$n=-\alpha+1+\frac{4\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}\ ……②$$ となる。← α を代入

（n：整数，$-\alpha+1$：整数）

条件より, nが整数となるには, $\dfrac{4\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$ が整数でなければいけないので

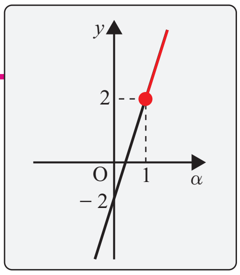
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が整数となる。⇒ $|f(x)|\geqq|g(x)|$

$|4\alpha-2|\geqq|\alpha^2+\alpha|$ ……③　となることが必要である。

ここで, $\alpha\geqq 1$より

$4\alpha-2>0$ となるので

$|4\alpha-2|=4\alpha-2$ ← 正より絶対値が外せる

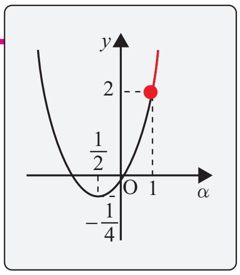


また, $\alpha^2+\alpha=\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$　より

右グラフより　$\alpha^2+\alpha>0$

がいえるので

$|\alpha^2+\alpha|=\alpha^2+\alpha$ ← 正より絶対値が外せる



よって, ③は

$4\alpha-2\geqq\alpha^2+\alpha$

$\Leftrightarrow\ \alpha^2-3\alpha+2\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ (\alpha-1)(\alpha-2)\leqq 0$

$\therefore\ 1\leqq\alpha\leqq 2$ ← $\alpha\leqq\beta$のとき, $(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0 \Leftrightarrow \alpha\leqq x\leqq\beta$

よって, 正の整数解αは, $\alpha=1,\ 2$

（ⅰ）　$\alpha=1$　のとき,

この値を②に代入して

$$n=-1+1+\frac{4\cdot 1-2}{1^2+1}=1$$

このとき, ①に代入して

$x^3+x^2-4x+2=0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)(x^2+2x-2)=0$

$\alpha=1$ より, $x=1$ を解に持つので, $(x-1)$ を因数に持つことがわかる！ので因数分解できる。

よって, $x=1$ 以外の解は

$x^2+2x-2=0$ の解より

$x=-1\pm\sqrt{3}$ ← ２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は, $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

（ⅱ）　$\alpha=2$　のとき,

この値を②に代入して

$$n=-2+1+\frac{4\cdot 2-2}{2^2+2}=0$$

このとき, ①に代入して

$-x^3+5x-2=0$

これは１つの整数解をもたないので不適。

よって, $x=1$ 以外の解は　$x=-1\pm\sqrt{3}$ …（答え）

３次方程式の整数解問題　実践例題⑥

例題６

$x^3-(k+1)x^2-2(1-k)x+9=0$ の１つの解が正の整数であるとき, 他の解を求めよ。
ただし, kは整数とする。

解答　１つの解が整数解タイプで定数項が素数ではないので, 文字kが整数の条件より,
文字について解き, 文字が整数となる整数解の組み合わせを求める。

$x^3-(k+1)x^2-2(1-k)x+9=0$

をkについて整理すると

$k(x^2-2x)=x^3-x^2-2x+9$ ……①

$\Leftrightarrow\ kx(x-2)=x^3-x^2-2x+9$ ← xでくくった

ここで, $x=0$ を代入すると $0=9$ となり不適。

文字で割るときは注意！

同様に, $x=2$ を代入すると $0=9$ となり不適。

よって, $x^2-2x\neq 0$ より, ①の両辺を x^2-2x で割ると

$$k=\frac{x^3-x^2-2x+9}{x^2-2x}=x+1+\frac{9}{x^2-2x}$$

← 割り算をして, 分子の次数＜分母の次数とした

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-2x\,\overline{)\,x^3-x^2-2x+9} \\ -\ \ x^3-2x^2\qquad \\ \hline x^2-2x\ \ \\ -\ \ x^2-2x\ \ \\ \hline 9 \end{array}$$

ここで, １つの正の整数解を α とおくと

$$k=\alpha+1+\frac{9}{\alpha^2-2\alpha} \quad \cdots\cdots ②$$ となる。← α を代入

整数　整数

条件より, k は整数となるのは,

$\dfrac{9}{\alpha^2-2\alpha}$ が整数でなければいけない。

$\dfrac{9}{\alpha^2-2\alpha}=\dfrac{9}{(\alpha-1)^2-1}$ と変形できるので ← 平方完成した

9が $(\alpha-1)^2-1$ で割り切れる場合を考える。

$(\alpha-1)^2=0,\ 1,\ 4,\ 16,\ 25\cdots\cdots$ より

$(\alpha-1)^2-1=-1,\ 0,\ 3,\ 15\cdots\cdots$ となるので

9の約数となる場合は

$(\alpha-1)^2-1=-1,\ 3$ のときとなる。

よって,

（ｉ） $(\alpha-1)^2-1=-1$ のとき,

$(\alpha-1)^2=0$

$\Leftrightarrow\ \alpha-1=0$

$\therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$ のとき,

この値を②に代入して

$k=1+1+\dfrac{9}{1^2-2}=-7$ となる。

このとき, ①に代入して

$x^3+6x^2-16x+9=0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)(x^2+7x-9)=0$

$\alpha=1$ より, $x=1$ を解に持つので, $(x-1)$ を因数に持つことがわかる！

よって, $x=1$ 以外の解は

$x^2+7x-9=0$ を解いて

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{85}}{2}$

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（ii） $(\alpha-1)^2-1=3$ のとき,

$(\alpha-1)^2=4$

$\Leftrightarrow\ \alpha-1=\pm 2$

$\alpha^2=a$ $(a\geqq 0)$ のとき $\alpha=\pm\sqrt{a}$

$\alpha>0$ より $\alpha=3$

$\alpha=3$ のとき, この値を②に代入して

$k=3+1+\dfrac{9}{3^2-2\cdot 3}=7$

このとき, ①に代入して

$x^3-8x^2+12x+9=0$

$\Leftrightarrow\ (x-3)(x^2-5x-3)=0$

$\alpha=3$ より, $x=3$ を解に持つので, $(x-3)$ を因数に持つことがわかる！

よって, $x=3$ 以外の解は

$x^2-5x-3=0$ を解いて

$\therefore\ x=3$ 以外の解は $x=\dfrac{5\pm\sqrt{35}}{2}$ …(答え)

3次方程式の整数解問題　実践例題⑦

例題7

xの方程式 $x^3-(6+k)x^2-4(1-2k)x+12(3-k)=0$ 少なくとも1つの整数解をもうような整数kの値をすべて求めよ。(同志社大)

解答　1つの解が整数解タイプで定数項が素数ではないので，文字kが整数の条件より，文字について解き，文字が整数となる整数解の組み合わせを求める。

$x^3-(6+k)x^2-4(1-2k)x+12(3-k)=0$

をkについて整理すると

$k(-x^2+8x-12)=x^3-6x^2-4x+36$

$\Leftrightarrow\quad k(x^2-8x+12)=x^3-6x^2-4x+36$ ……①

$\Leftrightarrow\quad k(x-2)(x-6)=x^3-6x^2-4x+36$

$$
\begin{array}{rl}
 & x+2 \\
x^2-8x+12 \,\big) & x^3-6x^2-4x+36 \\
- & x^3-8x^2+12x \\
\hline
 & 2x^2-16x+36 \\
- & 2x^2-16x+24 \\
\hline
 & 12
\end{array}
$$

ここで，$x=2$ を代入すると

$0=12$ となり不適。

同様に，$x=6$ を代入すると

$0=12$ となり不適。

よって，$x^2-8x+12\neq0$ より，①の両辺を$x^2-8x+12$で割ると

文字で割るときは注意！

$$k=\frac{x^3-6x^2-4x+36}{x^2-8x+12}$$

$$=x+2+\frac{12}{x^2-8x+12}$$

割り算をして，
分子の次数＜分母の次数とした

ここで，1つの整数解をαとおくと

$$k=\alpha+2+\frac{12}{\alpha^2-8\alpha+12}\quad\cdots\cdots②$$ となる。

α を代入

条件より，kが整数となるのは，

$\dfrac{12}{\alpha^2-8\alpha+12}$ が整数でなければいけない。

$\dfrac{12}{\alpha^2-8\alpha+12}=\dfrac{12}{(\alpha-4)^2-4}$ と変形できるので

平方完成

12が $(\alpha-4)^2-4$ で割り切れる場合を考える。

$(\alpha-4)^2=0,\ 1,\ 4,\ 16,\ 25\cdots\cdots$ より

$(\alpha-4)^2-4=-4,\ -3,\ 0,\ 5,\ 12,\ 21\cdots\cdots$ となるので

12の約数となる場合は

$(\alpha-4)^2-4=-4,\ -3,\ 12$　のときとなる。

（ⅰ）$(\alpha-4)^2-4=-4$ のとき，

$(\alpha-4)^2=0$

$\Leftrightarrow\quad \alpha-4=0$

$\therefore\quad \alpha=4$

このとき，②に代入して，$k=3$

（ⅱ）$(\alpha-4)^2-4=-3$ のとき，

$(\alpha-4)^2=1$

$\Leftrightarrow\ \alpha-4=\pm1$

$\alpha^2=a\ (a\geqq0)$のとき
$\alpha=\pm\sqrt{a}$

$\therefore\quad \alpha=3,\ 5$

このとき，②に代入して，$k=1,\ 3$

（ⅲ）$(\alpha-4)^2-4=12$ のとき，

$(\alpha-4)^2=16$

$\Leftrightarrow\ \alpha-4=\pm4$

$\alpha^2=a\ (a\geqq0)$のとき
$\alpha=\pm\sqrt{a}$

$\therefore\quad \alpha=0,\ 8$

このとき，②に代入して，$k=3,\ 11$

（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）の値を②に代入して

$k=1,3,11$……(答え)