Visual Memory Chart 最短距離の問題 早見チャート①

最短距離を求める問題とは？

図１のように，出発点Aから目的地Bまでの最短経路の経路数を求める問題で，確率の分野では有名・頻出問題である。

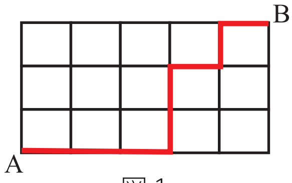


図１

最短距離問題の基本タイプの解法

解法には主に下記２通りある。しかし，Ⅱの解法を知らない人が多いが，変形した道など万能で有効的に使える。（ただし，道の本数が多い場合には，記入するのに時間がかかるというデメリットがある。）

Ⅰ.同じものを含む順列法……　「同じものを含む順列」と考えて解く方法。

右への移動を→，上への移動を↑と表す。例えば，図２の赤線の経路は「→→→↑↑→↑→」と表せる。また，図３の紫線の経路は，「→↑→↑→↑→→」と表せる。つまり，AからBへの最短距離の経路は「→→→→→↑↑↑」の並べ方⇒「同じものを含む順列」となる。

よって，→をm，↑をnとすると

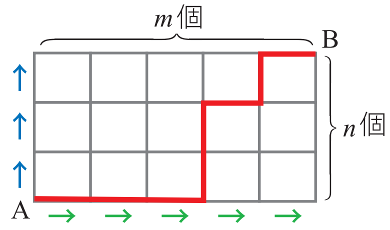


図２

最短経路の総数は $\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$

同じものを含む順列

n個のもののうち，同じものがそれぞれp個，q個，r個……あるときそれらを一列に並べる順列の総数は

$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots}$　$(p+q+r\cdots\cdots=n)$

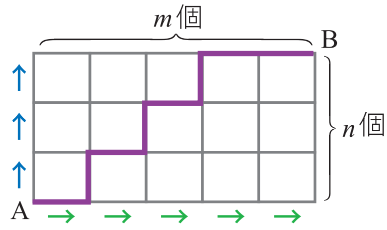


図３

また，異なる$(m+n)$箇所の中から，→を入れるm箇所（↑を入れるn箇所でもよい）を選ぶと考えて ${}_{m+n}C_m$ と計算してもよい。

Ⅱ.数字記入法……　各交差点への行き方（経路数）を足し算により求める方法。

図４において，赤色の数字が各交差点までの経路数を表している。例えば，点Xまでの経路数は10通りとなる。この方法は下図のように，正・長方形でない形，障害物がある形，抜けている形など，様々な道に応用でき，非常に有効なので，是非マスターすることをおすすめする！

AからBまで行く経路数が56通り

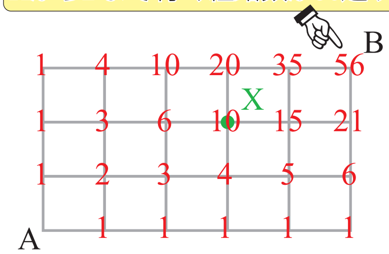
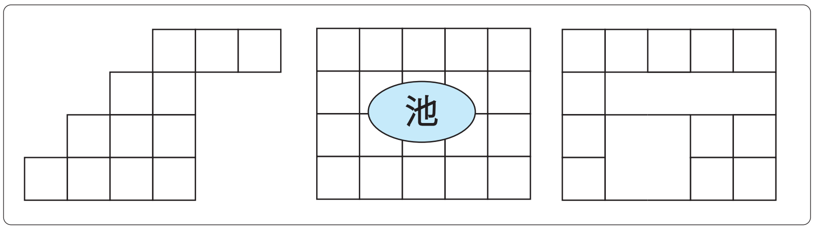
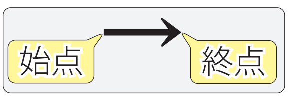


図４





経路数の書きかた

図５，６のように，交わらず，上（↑）また右（→）へそのまま移動するときは，経路数は変わらない。図７のように，交わる（矢印の終点同士がぶつかる）ときには，矢印の始点の数字同士を足す。

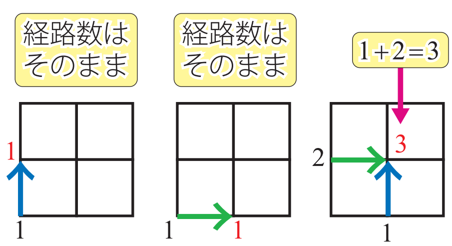


図５　図６　図７

書きかたのポイント

まず，端の「１」を書いてしまい，下図のように「外側 ⇒ 内側」と足していく。