Visual Memory Chart ランダムウォーク問題 早見チャート①

ランダムウォーク問題とは？

次に移動する位置が確率的にランダム(無作為)に決定される問題で，酔歩(すいほ)問題とも呼ばれている。反復試行の典型的問題で，入試では超頻出である。反復試行とは，独立な試行をくり返し行う試行のことで，例えば，「サイコロをくり返し振る」「硬貨をくり返し投げる」など。反復試行の問題は，1回の試行で起こる個々の確率を求めて，(個々の確率)×(起こり方の総数)によって求める。

問題例1

数直線上を動く点Pがある。点Pは原点にあり，硬貨を投げて表が出たら右へ2進み，裏が出たら左へ1進むとする。硬貨を6回投げるとき，原点に止まる確率を求めよ。

問題例2

数直線上を動く点Pがある。点Pは原点にあり，サイコロを投げて3以上の目が出たら右へ1進み，2以下の目が出たら左へ1進むとする。サイコロを5回投げるとき，1に止まる確率を求めよ。

解法の手順

STEP1 1回の試行で，それぞれの事象が起こる確率を求める。

サイコロを振る。硬貨を投げる。等

奇数の目が出る。表が出る。等

解答（問題例1）

表が出る確率は $\frac{1}{2}$，裏が出る確率は $\frac{1}{2}$

解答（問題例2）

3以上の目が出る確率は，3，4，5，6の目が出る確率なので $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

2以下の目が出る確率は，1，2の目が出る確率なので $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

STEP2 各事象の起こる回数を文字でおき，条件から式をつくる。(動点Pの位置は，n回中事象●●が何回出たかによって決まる。そこで，事象●●の回数をxと文字で置き，条件から式を作る。)

表が出る回数をxとすると，裏が出る回数は$6-x$回となり，6回の試行後の点Pの位置は，

$2x+(-1)(6-x)=3x-6$ ……① となる。

3以上の目が出る回数をxとすると，2以下の目が出る回数は$5-x$回となり，5回の試行後の点Pの位置は，

$1\cdot x+(-1)(5-x)=2x-5$ ……② となる。

右へ進む場合は+，左へ進む場合は−とする。

STEP3 条件のときの位置の値(例えば，原点だったら0)から方程式を立てて解く。

硬貨を6回投げて，点Pが原点Oにいるのは，①＝0 のときなので

$3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$

表が出る回数をxと置いたので，表が2回

よって，硬貨を6回投げて点Pが原点Oの位置にあるのは，6回中，表が2回，裏が4回出る場合である。

つまり

起こり方の総数は，表，表，裏，裏，裏，裏の順列の総数となる。

同じものを含む順列！ $\frac{6!}{2!4!}$ と計算してもよい！

サイコロを5回投げて，点Pが1にいるのは，②＝1 のときなので

$2x-5=1 \Leftrightarrow x=3$

よって，硬貨を5回投げて点Pが1の位置にあるのは，5回中，3以上の目が3回，2以下の目が2回出る場合である。

つまり

起こり方の総数は，3以上の目が出る事象を●，2以下の目が出る事象を★とすると●，●，●，★，★の順列の総数となる。

同じものを含む順列！ $\frac{5!}{3!2!}$ と計算してもよい！

STEP4 STEP1とSTEP3より，下記，反復試行の考え方を利用して確率を求める。

反復試行の確率

1回の試行において，確率pで起こる事象をAと確率qで起こる事象Bとする。この試行をn回繰り返すとき，Aがk回，Bが$(n-k)$回起こる確率は $p^k\cdot q^{n-k}\times{}_nC_k={}_nC_k\,p^k q^{n-k}$

6回のうち，表が2回出る回を選ぶ　表が2回出る確率　裏が4回出る確率

求める確率は ${}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{15}{64}$

5回のうち，●が3回出る回を選ぶ　3以上の目が3回出る確率　2以下の目が2回出る確率

求める確率は ${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{2^3}{3^5}=\frac{80}{243}$

Visual Memory Chart

ランダムウォーク問題 早見チャート②

経路図による「起こり方の総数」の求め方

ランダムウォーク問題の解法は，(起こり方の総数)×(個々の確率)によって求めるが，
「起こり方の総数」を求める際には，動点の移動を図で表して視覚化して考えるとわかりやすい。
特に，「はじめて★の位置に止まる確率」を求める問題には有効となる。
描き方の一例として，横軸に『移動回数(or時刻)』，縦軸に『位置』をとり，経路を記入する。
経路数の求め方は，最短経路の総数の求め方と同様の考え方で解くことができる。

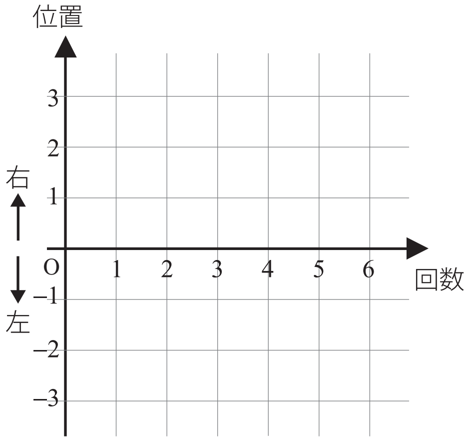
問題例

数直線上を動く点Pがある。点Pは原点にあり，硬貨を投げて表が出たら右へ１進み，裏が出たら左へ１進むとする。硬貨を6回投げるとき，6回投げて，はじめて原点に止まる確率を求めよ。

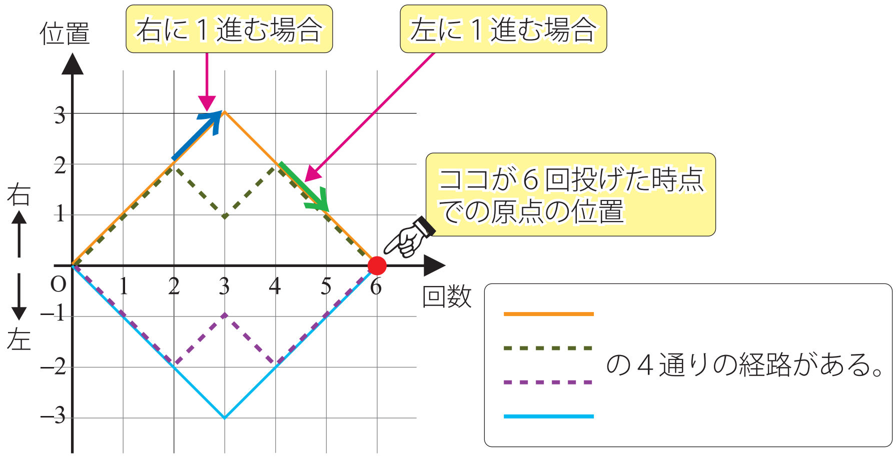
こういう時，楽に解ける！ Point!

解法の手順

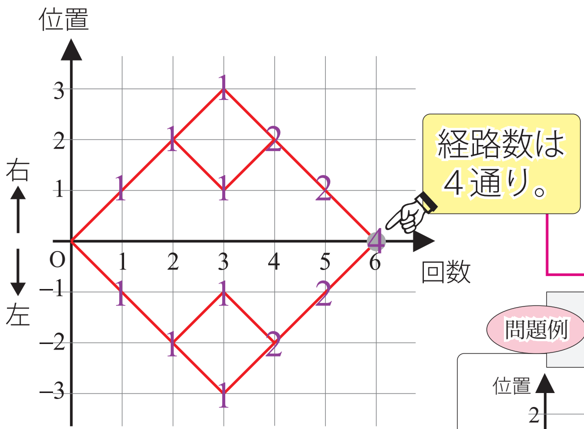
STEP1 横軸に『移動回数(or時刻)』，縦軸に『位置』をとる。



STEP2 条件を満たす点の移動の経路を記入する。



STEP3 経路数を数える。



STEP4 １つの経路の確率を求めて，(経路数)×(１つの経路の確率)を計算する。

この場合，↗が３回 ↘が３回(表が３回，裏が３回)

でどの経路でも確率は $\frac{1}{2}$ なので，

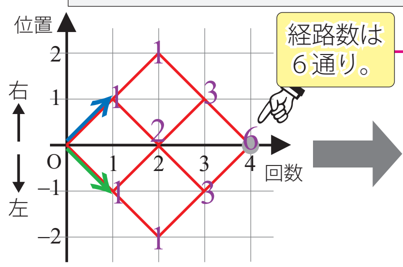
表が３回出る確率

裏が３回出る確率

求める確率は $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$ となる。

問題例

数直線上を動く点Pがある。点Pは原点にあり，１回の試行で２/３の確率で右へ１進み，１/３の確率で左へ１進むとする。４回の試行で，原点に止まる確率を求めよ。



↗の確率が $\frac{2}{3}$，↘の確率が $\frac{1}{3}$ より

求める確率は $6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$ となる。

右に２回進む確率　左に２回進む確率

経路数の数え方

始点 → 終点

図１，２のように，交わらず，右上(→)または左下(→)へそのまま移動するときは，経路数は変わらない。図３のように，交わる(矢印の終点同士がぶつかる)ときには，矢印の始点の数字同士を足す。

経路数はそのまま　1+2=3

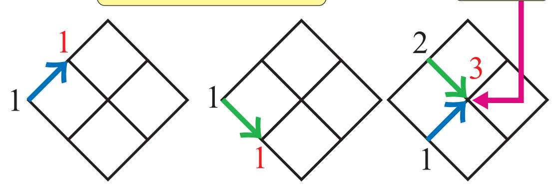


図１　図２　図３